1

解答例のページへ

n を自然数とする。100 枚のカードが入った袋があり，その中の各カードには 0 から 99 までの整数のうちの 1 つが書かれている。これらのカードに書かれた整数には，重複はないものとする。この袋の中身をよくかき混ぜた後，その中から 1 枚のカードを取り出し，取り出したカードをその袋に戻すという試行を n 回繰り返す。k 回目に取り出したカードに書かれている数を a_k として，それらの積 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ を M_n とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$M_n = 0$ となる確率を n の式で表せ。

(2)　$M_n \geqq 3$ となる確率を n の式で表せ。

(3)　M_n が 4 で割り切れない偶数となる確率を n の式で表せ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

a を正の実数とする。xy 平面において，条件 $2^{-\frac{1}{2}y}a^{2x}=2^{-\frac{1}{2}(x^2+1)}$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体で作られる図形を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　C は放物線であることを示せ。

(2)　$0<\theta<\pi$ とする。$a=\sin\theta$ であるときの放物線 C の頂点の座標を $(s,\ t)$ とする。$|s+t|\leqq 1$ が成り立つような θ の範囲を求めよ。

3

解答例のページへ

$a,\ b,\ c,\ d$ は整数であり，条件 $a<b<c<d$ かつ $(b-a)(c-a)(d+a)=(2a)^3$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=2$ のとき，上記の条件を満たす $b,\ c,\ d$ の組をすべて求めよ。

(2)　$a=3$ かつ $b,\ c,\ d$ が奇数のとき，上記の条件を満たす $b,\ c,\ d$ の組をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

a, b, t は実数であり，$t>1$ とする。xy 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y=x^2,\ \ C_2 : y=a(x-1)^2+b(x-1)+2$$

を考える。点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は C_1 と C_2 の共有点であり，点 P において C_1 の接線の傾きと C_2 の接線の傾きが等しいとする。次の問いに答えよ。

(1)　a と b を t の式でそれぞれ表せ。

(2)　$a>1$ であることを示せ。

(3)　放物線 C_2 の頂点の x 座標を t の式で表せ。

(4)　(3)で求めた式を $f(t)$ とする。$t>1$ の範囲で $\dfrac{1}{f(t)}$ を最小にする t の値を求めよ。

(5)　t の値は(4)で求めた通りとする。C_2 と直線 $y=2$ によって囲まれる図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

0 から 99 までの整数が 1 つずつ書かれている 100 枚のカードが入った袋から 1 枚のカードを取り出し，取り出したカードを袋に戻すという試行を n 回繰り返す。k 回目に取り出したカードに書かれている数を a_k として，$M_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ とおく。

(1)　$M_n \neq 0$ すなわち $M_n \geqq 1$ となるのは，0 以外の整数が書かれたカードを n 回取り出す場合より，その確率は $\left(\dfrac{99}{100}\right)^n$ である。

　すると，$M_n = 0$ となる確率は，$1 - \left(\dfrac{99}{100}\right)^n$ である。

(2)　まず，$M_n = 1$ となるのは，1 が書かれたカードを n 回取り出す場合より，その確率は $\left(\dfrac{1}{100}\right)^n$ である。

　また，$M_n = 2$ となるのは，1 が書かれたカードを $n-1$ 回，2 が書かれたカードを 1 回取り出す場合より，その確率は ${}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{100}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{100} = n\left(\dfrac{1}{100}\right)^n$ である。

　すると，$M_n \geqq 3$ となる確率は，(1)から $M_n \geqq 1$ となる確率が $\left(\dfrac{99}{100}\right)^n$ より，

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n - \left(\frac{1}{100}\right)^n - n\left(\frac{1}{100}\right)^n = \left(\frac{99}{100}\right)^n - (n+1)\left(\frac{1}{100}\right)^n$$

(3)　まず，100 枚のカードのうち，奇数は 50 枚，4 の倍数でない偶数は 25 枚ある。

　このとき，M_n が 4 で割り切れない偶数となるのは，奇数が書かれたカードを $n-1$ 回，4 の倍数でない偶数が書かれたカードを 1 回取り出す場合より，その確率は，${}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{50}{100}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{25}{100} = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cdot\dfrac{1}{4} = n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ である。

［コメント］

基本的な確率の問題です。3 つの設問がゆるく関連しています。

2

問題のページへ

(1)　図形 $C:2^{-\frac{1}{2}y}a^{2x}=2^{-\frac{1}{2}(x^2+1)}\,(a>0)$ より，$\log_2 2^{-\frac{1}{2}y}a^{2x}=\log_2 2^{-\frac{1}{2}(x^2+1)}$ となり，

$$-\frac{1}{2}y+2x\log_2 a=-\frac{1}{2}(x^2+1)\,,\ \ y-4x\log_2 a=x^2+1$$

すると，$y=x^2+4x\log_2 a+1=(x+2\log_2 a)^2+1-4(\log_2 a)^2$ から，C は頂点 $(-2\log_2 a,\ 1-4(\log_2 a)^2)$ で，軸 $x=-2\log_2 a$ の放物線である。

(2)　$a=\sin\theta\ (0<\theta<\pi)$ のとき $0<a\leqq 1$ となり，C の頂点の座標を $(s,\ t)$ とすると，

$$s=-2\log_2(\sin\theta)\,,\ \ t=1-4\{\log_2(\sin\theta)\}^2$$

さて，$t=1-s^2$ で $|s+t|\leqq 1$ から $|1+s-s^2|\leqq 1$ となり，$-1\leqq 1+s-s^2\leqq 1$ より，

$$-1\leqq 1+s-s^2\cdots\cdots\cdots①,\ \ 1+s-s^2\leqq 1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$s^2-s-2\leqq 0$ から $(s+1)(s-2)\leqq 0$ となり，$-1\leqq s\leqq 2\cdots\cdots\cdots③$

②より，$s^2-s\geqq 0$ から $s(s-1)\geqq 0$ となり，$s\leqq 0,\ 1\leqq s\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$-1\leqq s\leqq 0$，$1\leqq s\leqq 2$ となり，

$$-1\leqq -2\log_2(\sin\theta)\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑤,\ \ 1\leqq -2\log_2(\sin\theta)\leqq 2\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$0\leqq \log_2(\sin\theta)\leqq\dfrac{1}{2}$ から $1\leqq\sin\theta\leqq\sqrt{2}$ となり，$\sin\theta\leqq 1$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

⑥より，$-1\leqq\log_2(\sin\theta)\leqq -\dfrac{1}{2}$ から $\dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$$

以上より，求める θ の範囲は，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ である。

［コメント］

指数方程式と三角不等式についての融合題です。正確な計算力が求められます。

3

問題のページへ

整数 a, b, c, d に対し，$a<b<c<d$ かつ $(b-a)(c-a)(d+a)=(2a)^3$ ………①

(1)　$a=2$ のとき，①から，$(b-2)(c-2)(d+2)=2^6$　$(2<b<c<d)$ ………②

②より，p, q, r を 0 以上の整数とし，$b-2=2^p$，$c-2=2^q$，$d+2=2^r$ とおくと，

$$b=2^p+2,\ c=2^q+2,\ d=2^r-2$$

すると，$2^p\cdot 2^q\cdot 2^r=2^6$ から $2^{p+q+r}=2^6$ となり，$p+q+r=6$ ………③

$2<2^p+2<2^q+2<2^r-2$ より，$0\leqq p<q<r$ ……④が必要となる。

③④より，$(p,\ q,\ r)=(0,\ 1,\ 5)$，$(0,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 3)$ となる。

(i)　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 1,\ 5)$ のとき　$(b,\ c,\ d)=(3,\ 4,\ 30)$ となり適する。

(ii)　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 2,\ 4)$ のとき　$(b,\ c,\ d)=(3,\ 6,\ 14)$ となり適する。

(iii)　$(p,\ q,\ r)=(1,\ 2,\ 3)$ のとき　$(b,\ c,\ d)=(4,\ 6,\ 6)$ となり不適である。

(i)～(iii)より，②を満たす b, c, d は，$(b,\ c,\ d)=(3,\ 4,\ 30)$，$(3,\ 6,\ 14)$ である。

(2)　$a=3$ のとき，①から，$(b-3)(c-3)(d+3)=2^3\cdot 3^3$　$(3<b<c<d)$ ………⑤

そして，b, c, d は奇数より，$b-3$，$c-3$，$d+3$ はすべて偶数となり，⑤より，k, l, m を 0 以上の整数とし，$b-3=2\cdot 3^k$，$c-3=2\cdot 3^l$，$d+3=2\cdot 3^m$ とおくと，

$$b=2\cdot 3^k+3,\ c=2\cdot 3^l+3,\ d=2\cdot 3^m-3$$

すると，$2\cdot 3^k\cdot 2\cdot 3^l\cdot 2\cdot 3^m=2^3 3^3$ から $3^{k+l+m}=3^3$ となり，$k+l+m=3$ ………⑥

$3<2\cdot 3^k+3<2\cdot 3^l+3<2\cdot 3^m-3$ より，$0\leqq k<l<m$ ……⑦が必要となる。

⑥⑦より，$(k,\ l,\ m)=(0,\ 1,\ 2)$ から，$(b,\ c,\ d)=(5,\ 9,\ 15)$ となり適する。

したがって，⑤を満たす奇数 b, c, d は，$(b,\ c,\ d)=(5,\ 9,\ 15)$ である。

［コメント］

標準的な不定方程式の問題です。(1)(2)とも，まず必要条件を求め，そのあと十分性を確認しています。

4

問題のページへ

(1)　2 曲線 $C_1 : y = x^2 \cdots\cdots$①，$C_2 : y = a(x-1)^2 + b(x-1) + 2 \cdots\cdots$②は，点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t > 1)$ において接するので，①から $y' = 2x$，②から $y' = 2a(x-1) + b$ より，

$$2t = 2a(t-1) + b \cdots\cdots\cdots③,\quad t^2 = a(t-1)^2 + b(t-1) + 2 \cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$t^2 = a(t-1)^2 + \{2t - 2a(t-1)\}(t-1) + 2$ となり，

$$t^2 = -a(t-1)^2 + 2t(t-1) + 2,\quad a(t-1)^2 = t^2 - 2t + 2$$

すると，$a = \dfrac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^2}$ となり，③から $b = 2t - 2 \cdot \dfrac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^2} \cdot (t-1) = \dfrac{2(t-2)}{t-1}$

(2)　$a - 1 = \dfrac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^2} - 1 = \dfrac{1}{(t-1)^2} > 0$ より，$a > 1$ である。

(3)　②から $y = a\left(x - 1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + 2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$ となり，C_2 の頂点の x 座標は，

$$x = 1 - \frac{b}{2a} = 1 - \frac{2(t-2)}{t-1} \cdot \frac{(t-1)^2}{2(t^2 - 2t + 2)} = 1 - \frac{(t-2)(t-1)}{t^2 - 2t + 2} = \frac{t}{t^2 - 2t + 2}$$

(4)　$f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 2t + 2}$ のとき，$\dfrac{1}{f(t)} = \dfrac{t^2 - 2t + 2}{t} = t + \dfrac{2}{t} - 2$ となり，$t > 1$ から，

$$t + \frac{2}{t} - 2 \geqq 2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

なお，等号は $t = \dfrac{2}{t}$ すなわち $t = \sqrt{2}$ のときに成り立つ。

これより，$\dfrac{1}{f(t)}$ が最小になるのは，$t = \sqrt{2}$ のときである。

(5)　$t = \sqrt{2}$ のとき，(1)から，$b = \dfrac{2(\sqrt{2} - 2)}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{2} - 1} = -2\sqrt{2}$

$$a = \frac{2 - 2\sqrt{2} + 2}{(\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$$

これより，$C_2 : y = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)(x-1)^2 - 2\sqrt{2}(x-1) + 2$ となり，直線 $y = 2$ との交点は，$2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)(x-1)^2 - 2\sqrt{2}(x-1) + 2 = 2$ から，

$$(\sqrt{2} + 1)(x-1)^2 - (x-1) = 0,\quad (x-1)\{(\sqrt{2} + 1)(x-1) - 1\} = 0$$

これより，$x = 1$，$x = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} + 1 = \sqrt{2}$ となり，C_2 と直線 $y = 2$ によって囲まれる図形の面積を S とすると，

$$S = \int_1^{\sqrt{2}} [2 - \{a(x-1)^2 + b(x-1) + 2\}]dx = -a\int_1^{\sqrt{2}} (x-1)(x - \sqrt{2})dx$$

$$= \frac{1}{6}a(\sqrt{2} - 1)^3 = \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}(2-1)(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}(3 - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \frac{4}{3}$$

［コメント］

微積分の総合問題です。内容は標準的ですが，計算はやや多めです。