1

解答解説のページへ

A, B の 2 人が階段の一番下の段にいる。2 人はじゃんけんをして，下記のルールに従い階段を移動するゲームを繰り返し行う。

・A は勝ったら 1 段のぼり，あいこか負けた場合，同じ段にとどまる。

・B はグー，チョキで勝ったら 1 段のぼり，パーで勝ったら 3 段のぼる。また，あいこか，グー，チョキで負けた場合，同じ段にとどまる。パーで負けたら階段の一番下の段まで戻る (すでに一番下の段にいる場合はとどまる)。

A, B ともに $\dfrac{1}{3}$ ずつの確率でグー，チョキ，パーを出すものとし，すべての試行は独立とする。2 回目以降のゲームは，2 人とも直前のゲームでの移動を終えた位置で行うものとする。階段の一番下の段を 0 段目とし，そこから m 段のぼった段を m 段目とする。次の問いに答えよ。

(1) n は自然数とし，m は $0 \leqq m \leqq n$ である整数とする。n 回のゲームを終えた結果，A が m 段目にいる確率 $x_{n,m}$ を求めよ。

(2) m は 0 以上の整数とする。2 回のゲームを終えた結果，B が m 段目にいる確率 y_m を求めよ。

(3) n は自然数とする。n 回のゲームを終えた結果，B が 0 段目にいる確率 z_n を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

i は虚数単位を表すものとする。複素数 z に関する方程式 $z=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\overline{z}$ の表す複素数平面上の図形を l とする。次の問いに答えよ。

(1)　l は直線であることを証明せよ。

(2)　直線 l に関して複素数 w と対称な点を w の式で表せ。

(3)　複素数 z に対して，z を点 1 を中心に反時計回りに $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_1 とし，次に z_1 を原点を中心に反時計回りに $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_2 とする。さらに，直線 l に関して z_2 と対称な点を $f(z)$ とする。$f(z)$ を z の式で表せ。

(4)　$f(z)$ は(3)のとおりとする。複素数 z に関する方程式 $f(z)=-z-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の表す複素数平面上の図形を図示せよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ は実数とし，$f(x)$ は $a,\ b$ が属する開区間で定義された関数とする。$f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，次の等式を証明せよ。

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx=(b-a)(f(a)+f(b))-2\int_a^b f(x)\,dx$$

(2) t を正の実数とする。次の不等式を証明せよ。

$$0\leqq\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\leqq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$$

(3) 次で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}$ を求めよ。

$$a_n=\log(n!)-n\log n+n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

4

解答解説のページへ

p は素数とする。次の問いに答えよ。

(1) j を $0<j<p$ である整数とすると，二項係数 ${}_p\mathrm{C}_j$ は p で割り切れることを示せ。

(2) 自然数 m に対して $(m+1)^p-m^p-1$ は p で割り切れることを示せ。

(3) 自然数 m に対して m^p-m は p で割り切れることを示せ。さらに m が p で割り切れないときには，$m^{p-1}-1$ が p で割り切れることを示せ。

ここで，次の集合 S を考える。$S=\{4n^2+4n-1\,|\,n\text{は自然数}\}$

例えば，$n=22$ とすると $4n^2+4n-1=2023$ なので 2023 は S に属する。次の問いに答えよ。

(4) 整数 a が S に属し，$a=4n^2+4n-1$ (n は自然数)と表されているとする。このとき，a と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。

(5) p は 3 以上の素数とする。p が S に属するある整数 a を割り切るならば，$2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は p で割り切れることを示せ。

1　　問題のページへ

(1)　1 回のゲームで, A が勝って 1 段のぼる確率は $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, あいこか負けて同じ段にとどまる確率は $\dfrac{3}{9}+\dfrac{3}{9}=\dfrac{2}{3}$ である。

$0\leqq m\leqq n$ のとき, n 回のゲームを終えて, A が m 段目にいる確率 $x_{n,m}$ は,

$$x_{n,m}={}_n\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

(2)　1 回のゲームで, B がのぼる段数についてまとめると, 右表のようになる。なお, $-m$ は 0 段目に戻ることを表す。

A ＼ B	グー	チョキ	パー
グー	$+0$	$+0$	$+3$
チョキ	$+1$	$+0$	$-m$
パー	$+0$	$+1$	$+0$

2 回のゲームを終えて, B が m 段目にいる確率 y_m について,

・$m=0$ のとき

1 回目を終えたとき, 0 段目, 1 段目, 3 段目にいる場合に分けると,

$$y_0=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)^2+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{36}{81}+\frac{2}{81}+\frac{1}{81}=\frac{13}{27}$$

・$m=1$ のとき　1 回目を終えたとき, 0 段目, 1 段目にいる場合に分けると,

$$y_1=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{12}{81}+\frac{10}{81}=\frac{22}{81}$$

・$m=2$ のとき　1 回目を終えたとき, 1 段目にいる場合だけなので,

$$y_2=\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$$

・$m=3$ のとき　1 回目を終えたとき, 0 段目, 3 段目にいる場合に分けると,

$$y_3=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{6}{81}+\frac{5}{81}=\frac{11}{81}$$

・$m=4$ のとき　1 回目を終えたとき, 1 段目, 3 段目にいる場合に分けると,

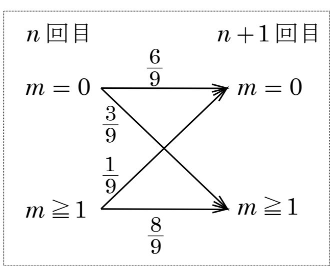
$$y_4=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{81}+\frac{2}{81}=\frac{4}{81}$$

・$m=6$ のとき　1 回目を終えたとき, 3 段目にいる場合だけなので,

$$y_6=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}$$

・$m=5$, $m\geqq 7$ のとき　$0\leqq m\leqq 6$ かつ $m\neq 5$ より, $y_m=0$

(3)　n 回のゲームを終えて, B が 0 段目にいる確率 z_n について, $z_1=\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{3}$ であり, 状態の推移図は右図のようになるので,



$$z_{n+1}=\frac{6}{9}z_n+\frac{1}{9}(1-z_n)=\frac{5}{9}z_n+\frac{1}{9}$$

$z_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{9}\left(z_n-\dfrac{1}{4}\right)$ と変形すると,

$$z_n-\frac{1}{4}=\left(z_1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

したがって，$z_n=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$ である。

［解 説］

確率と漸化式の問題です。(1)と(2)は具体的に計算するものの, (3)では考え方を切り替え, 漸化式を立てて処理をします。最近, ときどき出合う設問形式です。

2

問題のページへ

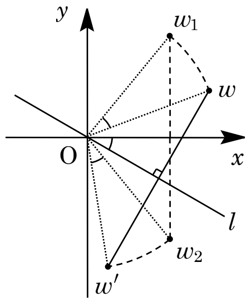
(1)　$z=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{z}$ に対して，$z=x+yi$ とおくと，

$$x+yi=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x-yi)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)i$$

すると，$x=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$……①かつ $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y$……②である。

①は $x+\sqrt{3}y=0$，②は $\sqrt{3}x+3y=0$ すなわち $x+\sqrt{3}y=0$ となり，①と②は x, y の 1 次式 $x+\sqrt{3}y=0$ で一致するので，z の表す図形 l は直線である。

(2)　まず，直線 l に関して複素数 w と対称な点を w' とおく。

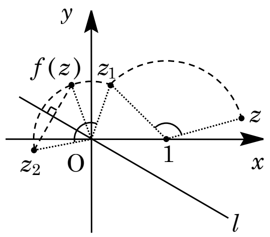


ここで，直線 l は実軸を原点回りに $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転したものであることに着目し，w を原点回りに $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を w_1，w_1 を実軸対称した点を w_2 とすると，w_2 を原点回りに $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点が w' に一致する。

これより，$w_1=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)w$，$w_2=\overline{w_1}$ となり，

$$\begin{aligned}w'&=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}w_2=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\overline{w_1}\\&=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\overline{w}\\&=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\overline{w}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{w}\end{aligned}$$

(3)　z を点 1 を中心に $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_1，z_1 を原点を中心に $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_2，z_2 を直線 l に関して対称移動した点を $f(z)$ とすると，$z_1-1=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(z-1)$，$z_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)z_1$ となり，(2)から，



$$\begin{aligned}f(z)&=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\overline{z_2}\\&=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}\overline{z_1}\\&=\{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\}\overline{z_1}=-\overline{z_1}\\&=-\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}(\overline{z}-1)-1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\overline{z}-1)-1\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{z}-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\end{aligned}$$

(4)　$f(z)=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ より，$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{z}-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，

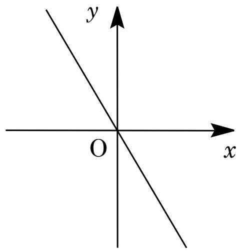
$$z=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{z}$$

ここで，$z=x+yi$ とおくと，

$$x+yi=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x-yi)=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)i$$

すると，$x=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$……③かつ $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$……④である。

③は $3x+\sqrt{3}y=0$ すなわち $\sqrt{3}x+y=0$，④は $\sqrt{3}x+y=0$ となり，③と④は x，y の 1 次式 $\sqrt{3}x+y=0$ で一致するので，z の表す図形は直線 $y=-\sqrt{3}x$ である。



これを，複素数平面上に図示すると，右図の直線となる。

［解 説］

複素数平面を題材にした問題です。(1)は $z=x+yi$ として数式処理をしましたが，点 z を実軸対称し，さらに原点回りに $-\frac{\pi}{3}$ 回転すると，もとの点 z に一致するとみる方法もあります。(4)の後半も同様です。

3

問題のページへ

(1) $I=\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx$ とおくと,

$$I=\Big[(b-x)(x-a)f'(x)\Big]_a^b-\int_a^b(-x+a+b-x)f'(x)dx$$

$$=\int_a^b(2x-a-b)f'(x)dx=\Big[(2x-a-b)f(x)\Big]_a^b-\int_a^b 2f(x)dx$$

$$=(b-a)f(b)-(a-b)f(a)-2\int_a^b f(x)dx$$

$$=(b-a)(f(a)+f(b))-2\int_a^b f(x)dx\cdots\cdots\cdots①$$

(2) ①で $a=t$, $b=t+1$, $f(x)=\log x$ とおくと, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ となり,

$$-\int_t^{t+1}\frac{(t+1-x)(x-t)}{x^2}dx=(t+1-t)(\log t+\log(t+1))-2\int_t^{t+1}\log x\,dx$$

$$\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))=\int_t^{t+1}\frac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}dx\cdots\cdots\cdots②$$

すると, $\dfrac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}=\dfrac{-x^2+(2t+1)x-t^2-t}{2x^2}=\dfrac{1}{2x^2}\left\{-\left(x-\dfrac{2t+1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}$

から, $0<t\leqq x\leqq t+1$ において,

$$0\leqq\frac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}\leqq\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8x^2}$$

この不等式の各辺を t から $t+1$ まで積分すると,

$$0\leqq\int_t^{t+1}\frac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}dx\leqq\int_t^{t+1}\frac{1}{8x^2}dx=-\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{x}\Big]_t^{t+1}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$$

②より, $0\leqq\displaystyle\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\leqq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\cdots\cdots\cdots③$

(3) t を自然数とし, $n\geqq 3$ で, ③の各辺を $t=1$ から $t=n-1$ まで和をとると,

$$0\leqq\sum_{t=1}^{n-1}\left\{\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\right\}\leqq\frac{1}{8}\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\cdots\cdots\cdots④$$

$$\sum_{t=1}^{n-1}\left\{\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\right\}$$

$$=\int_1^n\log x\,dx-\frac{1}{2}\log 1-(\log 2+\log 3+\cdots+\log(n-1))-\frac{1}{2}\log n$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^n-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n=n\log n-n+1-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n$$

ここで, $a_n=\log(n!)-n\log n+n$ より,

$$n\log n-n+1-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n=-a_n+1+\frac{1}{2}\log n$$

また, $\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ なので, ④より,

$$0 \leqq -a_n + 1 + \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

すると，$1 + \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqq a_n \leqq 1 + \frac{1}{2}\log n$ となり，

$$\frac{1}{\log n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\log n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqq \frac{a_n}{\log n} \leqq \frac{1}{\log n} + \frac{1}{2}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n} = \frac{1}{2}$ である。

［解 説］

定積分と不等式に極限計算を組み合わせた典型題です。適当な距離感のある誘導で構成され，要演習の 1 題となるでしょう。

4

問題のページへ

(1)　素数 p に対して，j を $0<j<p$ を満たす整数とする。

このとき，整数 ${}_p\mathrm{C}_j=\dfrac{p(p-1)\cdots(p-j+1)}{j!}$ について，p と j 以下の自然数は互いに素なので，p は $j!$ で割り切れない。

すると，$\dfrac{p(p-1)\cdots(p-j+1)}{j!}$ は p の倍数となり，${}_p\mathrm{C}_j$ は p で割り切れる。

(2)　自然数 m に対して，二項定理より，

$$(m+1)^p-m^p-1=\sum_{k=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_k\,m^k-m^p-1=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k\,m^k$$

(1)から，${}_p\mathrm{C}_k\ (0<k<p)$ は p で割り切れるので，$(m+1)^p-m^p-1$ は p で割り切れる。

(3)　自然数 m に対して，m^p-m が p で割り切れることを数学的帰納法で示す。

(i)　$m=1$ のとき　$1^p-1=0$ は p で割り切れる。

(ii)　$m=k$ のとき　k^p-k が p で割り切れると仮定すると，

$$(k+1)^p-(k+1)=\{(k+1)^p-k^p-1\}+(k^p-k)$$

(2)より $(k+1)^p-k^p-1$ は p で割り切れるので，$(k+1)^p-(k+1)$ は p で割り切れ，$m=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 m に対して，m^p-m は p で割り切れる。

さらに，$m^p-m=m(m^{p-1}-1)$ より，m が p で割り切れないときには，$m^{p-1}-1$ が p で割り切れることになる。

(4)　集合 $S=\{4n^2+4n-1\mid n\text{は自然数}\}$ に対して，$a\in S$ のとき，$a>0$ で，

$$a=4n^2+4n-1=(2n+1)^2-2\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，a と $2n+1$ の最大公約数を g とおくと，a' と b' を互いに素な整数として，$a=ga'$，$2n+1=gb'$ と表せ，①から，

$$ga'=g^2b'^2-2,\ \ g(gb'^2-a')=2$$

これより，g は 2 の約数となり，$g=1$ または $g=2$ である。

$g=2$ とすると $2n+1=2b'$ となり，左辺は奇数，右辺は偶数となり成立しない。

したがって，$g=1$ となり，a と $2n+1$ は互いに素である。

(5)　p を 3 以上の素数とし，a が p で割り切れるとき，(4)から，a と $2n+1$ は互いに素であるので，$2n+1$ は p で割り切れない。

すると，(3)から $(2n+1)^{p-1}-1$ は p で割り切れる。

さて，①から $a=(2n+1)^2-2$ が p で割り切れるとき，l を整数として，

$$(2n+1)^2-2=pl,\ \ (2n+1)^2=pl+2\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，p は 3 以上の奇数なので，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数となり，②から，

$$\{(2n+1)^2\}^{\frac{p-1}{2}}=(pl+2)^{\frac{p-1}{2}},\ (2n+1)^{p-1}-1=(pl+2)^{\frac{p-1}{2}}-1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，③の左辺は p で割り切れるので，右辺の $(pl+2)^{\frac{p-1}{2}}-1$ も p で割り切れることになり，さらに二項定理より，

$$\begin{aligned}(pl+2)^{\frac{p-1}{2}}-1&=\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}{}_{\frac{p-1}{2}}\mathrm{C}_j(pl)^j\cdot 2^{\frac{p-1}{2}-j}-1\\&=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}{}_{\frac{p-1}{2}}\mathrm{C}_j(pl)^j\cdot 2^{\frac{p-1}{2}-j}+2^{\frac{p-1}{2}}-1\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}{}_{\frac{p-1}{2}}\mathrm{C}_j(pl)^j\cdot 2^{\frac{p-1}{2}-j}$ は p で割り切れることより，$2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は p で割り切れる。

［解　説］

整数を題材とした論証問題です。(4)までは丁寧な誘導に従えばよいのですが，これらの結論を利用する(5)はかなり難しめです。市大のころはほとんど見かけなかったタイプですが。