1

解答解説のページへ

1 回の試行ごとに赤玉か白玉を 1 個出す機械を考える。この機械からは 1 回目の試行では赤玉か白玉がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の確率で出るが，2 回目以降には直前に出たものと同じ色の玉がαの確率で，直前に出たものと異なる色の玉が$1-\alpha$の確率で，それぞれ出るものとする。ただし，αは$0<\alpha<1$を満たす定数とする。$(n+m)$回目の試行を終えた時点で赤玉が n 個，白玉が m 個出ている確率を$P_{n,m}$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$P_{2,2}$をαの式で表せ。

(2)　$P_{n,1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$をαとnの式で表せ。

(3)　$P_{4,1}$の値が最大となるαを求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$をそれぞれ$a_n=\dfrac{5^{2^{n-1}}-1}{2^{n+1}}$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。ただし，$5^{2^{n-1}}$は5の2^{n-1}乗を表す。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3を求めよ。

(2)　すべての自然数nについてb_nは整数であることを示せ。

(3)　すべての自然数nについてa_nは整数であることを示せ。

(4)　すべての自然数nについてa_nは奇数であることを示せ。

3

解答解説のページへ

平面上の直線 $l_1 : y=\sqrt{3}x$ ，$l_2 : y=-\sqrt{3}x$ ，$l_3 : y=0$ を考える。点 $\mathrm{P}_0(\cos t_0,\ \sin t_0)$ $\left(0 \leqq t_0 \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$ に対して，l_1，原点，l_2，原点，l_3，原点に関して対称な点を次々にとることにより，点 P_1 から P_6 を定める。つまり，P_0 と l_1 に関して対称な点が P_1 であり，P_1 と原点に関して対称な点が P_2 であり，以下，同様に P_3，P_4，P_5，P_6 を定める。また，P_6 から始めて，再び l_1，原点，l_2，原点，l_3，原点に関して対称な点を次々にとることにより，点 P_7 から P_{12} を定める。つまり，P_6 と l_1 に関して対称な点が P_7 であり，P_7 と原点に関して対称な点が P_8 であり，以下，同様に P_9，P_{10}，P_{11}，P_{12} を定める。さらに，t_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$ を P_i の座標が $(\cos t_i,\ \sin t_i)$ $(0 \leqq t_i < 2\pi)$ となる実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，t_1 と t_2 を求めよ。

(2)　t_6 を t_0 の式で表し，P_6 は不等式 $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$ の表す領域の点であることを示せ。

(3)　$\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_{12}$ を示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標平面上で，原点 O と点 A$(1,\ 3)$ を結ぶ線分 OA を考える。与えられた点 P に対し，P と線分 OA の距離を $d(\mathrm{P})$ とおく。すなわち $d(\mathrm{P})$ は，点 Q が線分 OA 上を動くときの線分 PQ の長さの最小値である。次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標が $(5,\ 2)$ のとき，$d(\mathrm{P})$ の値を求めよ。

(2)　点 P の座標が $(a,\ b)$ のとき，$d(\mathrm{P})$ を $a,\ b$ の式で表せ。

(3)　放物線 $y=x^2$ 上にあり，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$ を満たす点 P の x 座標をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　4 回目の試行を終えた時点で，赤玉が 2 個，白玉が 2 個出ているのは，

・白→白→赤→赤と出るとき　この確率は$\dfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha)$

・白→赤→白→赤と出るとき　この確率は$\dfrac{1}{2}(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)=\dfrac{1}{2}(1-\alpha)^3$

・白→赤→赤→白と出るとき　この確率は$\dfrac{1}{2}(1-\alpha)\alpha(1-\alpha)=\dfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha)^2$

・赤→赤→白→白と出るとき　この確率は$\dfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha)$

・赤→白→赤→白と出るとき　この確率は$\dfrac{1}{2}(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)=\dfrac{1}{2}(1-\alpha)^3$

・赤→白→白→赤と出るとき　この確率は$\dfrac{1}{2}(1-\alpha)\alpha(1-\alpha)=\dfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha)^2$

したがって，赤玉が 2 個，白玉が 2 個出ている確率$P_{2,2}$は，

$$P_{2,2}=2\left\{\frac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha)+\frac{1}{2}(1-\alpha)^3+\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)^2\right\}$$
$$=(1-\alpha)\{\alpha^2+(1-\alpha)^2+\alpha(1-\alpha)\}=(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)$$

(2)　$n+1$回目の試行を終えた時点で，赤玉がn個，白玉が 1 個出ているのは，

・1 回目だけ白玉が出ているとき　この確率は$\dfrac{1}{2}(1-\alpha)\alpha^{n-1}$

・k回目$(2\leqq k\leqq n)$だけ白玉が出ているとき

この確率は$\dfrac{1}{2}\alpha^{k-2}(1-\alpha)^2\alpha^{n-k}=\dfrac{1}{2}\alpha^{n-2}(1-\alpha)^2$

・$n+1$回目だけ白玉が出ているとき　この確率は$\dfrac{1}{2}\alpha^{n-1}(1-\alpha)$

したがって，赤玉がn個，白玉が 1 個出ている確率$P_{n,1}$は，$n\geqq 2$で，

$$P_{n,1}=\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha^{n-1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}\alpha^{n-2}(1-\alpha)^2+\frac{1}{2}\alpha^{n-1}(1-\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\alpha^{n-2}(1-\alpha)\{2\alpha+(n-1)(1-\alpha)\}=\frac{1}{2}\alpha^{n-2}(1-\alpha)\{(1-\alpha)n+3\alpha-1\}$$

なお，$P_{1,1}=2\cdot\dfrac{1}{2}(1-\alpha)=1-\alpha$から，上式は$n=1$のときも成り立っている。

(3)　(2)より，$P_{4,1}=\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha)\{4(1-\alpha)+3\alpha-1\}=\dfrac{1}{2}\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-3)$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(x-1)(x-3)=\dfrac{1}{2}(x^4-4x^3+3x^2)$ $(0<x<1)$とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{2}(4x^3-12x^2+6x)$$
$$=x(2x^2-6x+3)$$

これより，$f(x)$は増減が右表のようになり，$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$で最大となる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

以上より，$P_{4,1}$ の値が最大となるのは $\alpha = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ のときである。

［解 説］

確率の標準的な問題です。(2)も(1)と同様に具体的に考えて，解答例を記述しています。なお，(3)は付録でしょうか。

2

問題のページへ

(1)　$a_n=\dfrac{5^{2^{n-1}}-1}{2^{n+1}}$ に対して，$a_1=\dfrac{5^1-1}{2^2}=1$，$a_2=\dfrac{5^2-1}{2^3}=3$，$a_3=\dfrac{5^4-1}{2^4}=39$

(2)　$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{5^{2^n}-1}{2^{n+2}}\cdot\dfrac{2^{n+1}}{5^{2^{n-1}}-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5^{2^n}-1}{5^{2^{n-1}}-1}$ となる。

ここで，$m=2^{n-1}$ とおくと，$2^n=2^{n-1+1}=2^{n-1}\cdot 2^1=2m$ であり，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{2^n}-1}{5^{2^{n-1}}-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{2m}-1}{5^m-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(5^m)^2-1}{5^m-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(5^m+1)(5^m-1)}{5^m-1}=\frac{1}{2}(5^m+1)$$

よって，$b_n=\dfrac{1}{2}(5^m+1)=\dfrac{1}{2}\left(5^{2^{n-1}}+1\right)$ となる。

すると，すべての自然数 n について，$m=2^{n-1}$ は整数になるので $5^m=5^{2^{n-1}}$ は奇数，そして $5^m+1=5^{2^{n-1}}+1$ は偶数になることより，b_n は整数である。

(3)　$a_1=1$ は整数であり，また $a_{n+1}=b_na_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ なので，$n\geqq 2$ で，

$$a_n=a_1b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}=b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)から b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は整数なので，a_n は整数である。

(4)　すべての自然数 n について，$m=2^{n-1}$ は自然数になるので，

$$5^m+1=(4+1)^m+1=\left(\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k4^k\right)+1=\left(\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k4^k\right)+{}_m\mathrm{C}_0+1$$

すると，N を自然数として，$5^m+1=4N+{}_m\mathrm{C}_0+1=4N+2$ とおくことができ，

$$b_n=\frac{1}{2}(4N+2)=2N+1$$

したがって，$a_1=1$ は奇数で，$(*)$ から $n\geqq 2$ で a_n も奇数になることより，すべての自然数 n について a_n は奇数である。

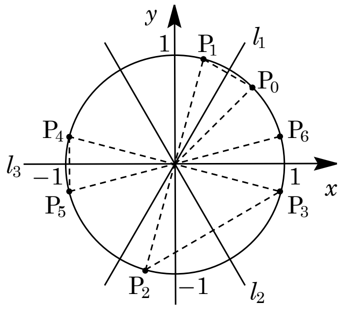
［解　説］

漸化式と整数の融合問題です。(2)で指数部分の処理が面倒と感じるときは，解答例のように置換えをした方がよいでしょう。また，(3)までの流れから，(4)は 5^m+1 が 4 の倍数でない偶数ということを示せばよいことになります。

3

問題のページへ

(1)　$l_1 : y=\sqrt{3}x$，$l_2 : y=-\sqrt{3}x$，$l_3 : y=0$ に対し，点 $P_0(\cos t_0,\ \sin t_0)$ について，l_1，原点，l_2，原点，l_3，原点に関して対称な点を次々にとり，点 P_1 から P_6 を定める。ここで，l_1，l_2 と x 軸の正の部分とのなす角は，それぞれ $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ であり，l_3 は x 軸であることに留意して，点 $P_i(\cos t_i,\ \sin t_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。ただし，$0 \leqq t_i < 2\pi$ である。



すると，$\dfrac{t_0+t_1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ より $t_1=\dfrac{2}{3}\pi-t_0$，また $t_2=t_1+\pi$ となる。

これより，$t_0=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$t_1=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{12}\pi$，$t_2=\dfrac{5}{12}\pi+\pi=\dfrac{17}{12}\pi$ である。

(2)　$0 \leqq t_0 \leqq \dfrac{\pi}{3}$ について，$0 \leqq t_0 < \dfrac{\pi}{3}$ のときと $t_0=\dfrac{\pi}{3}$ のときに場合分けをする。

(i)　$0 \leqq t_0 < \dfrac{\pi}{3}$ のとき　$0 \leqq t_i < 2\pi$ に注意して，

$$t_1=\frac{2}{3}\pi-t_0\left(\frac{\pi}{3}<t_1\leqq\frac{2}{3}\pi\right),\ t_2=t_1+\pi\left(\frac{4}{3}\pi<t_2\leqq\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$t_3=\frac{10}{3}\pi-t_2\left(\frac{5}{3}\pi\leqq t_3<2\pi\right),\ t_4=t_3-\pi\left(\frac{2}{3}\pi\leqq t_4<\pi\right)$$

$$t_5=2\pi-t_4\left(\pi<t_5\leqq\frac{4}{3}\pi\right),\ t_6=t_5-\pi\left(0<t_6\leqq\frac{\pi}{3}\right)$$

これより，t_6 を t_0 を用いて表すと，

$$t_6=t_5-\pi=(2\pi-t_4)-\pi=\pi-t_4=\pi-(t_3-\pi)=2\pi-t_3=2\pi-\left(\frac{10}{3}\pi-t_2\right)$$

$$=t_2-\frac{4}{3}\pi=(t_1+\pi)-\frac{4}{3}\pi=t_1-\frac{\pi}{3}=\left(\frac{2}{3}\pi-t_0\right)-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-t_0$$

(ii)　$t_0=\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$t_1=\dfrac{\pi}{3}$，$t_2=\dfrac{4}{3}\pi$，$t_3=0$，$t_4=\pi$，$t_5=\pi$，$t_6=0$

(i)(ii)より，$0 \leqq t_0 \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$t_6=\dfrac{\pi}{3}-t_0$ である。

すると，$0 \leqq t_6 \leqq \dfrac{\pi}{3}$ となり，点 $P_6(\cos t_6,\ \sin t_6)$ は不等式 $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$ の表す領域の点となる。

(3)　P_0 から P_6 と同様に，P_6 から P_{12} を定めると，$t_{12}=\dfrac{\pi}{3}-t_6=\dfrac{\pi}{3}-\left(\dfrac{\pi}{3}-t_0\right)=t_0$

したがって，$P_0(\cos t_0,\ \sin t_0)$，$P_{12}(\cos t_{12},\ \sin t_{12})$ から，$P_0=P_{12}$ である。

［解　説］

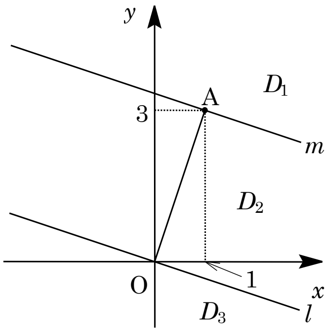
点の対称移動を題材にした読解力を要する問題です。なお，(2)で場合分けをしたのは，$0 \leqq t_i < 2\pi$ という条件のためです。

4

問題のページへ

(1)　原点 O と点 A(1, 3) に対して，線分 OA の方程式は，

$$y=3x\ (0\leqq x\leqq 1)$$



直線 OA に垂直な点 O，点 A を通る直線を，それぞれ l，m とおくと，l の方程式は $y=-\dfrac{1}{3}x$，m の方程式は $y-3=-\dfrac{1}{3}(x-1)$ より $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$ となる。

ここで，領域 D_1，D_2，D_3 を以下のように定める。

$$D_1:y\geqq -\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}\ (x+3y\geqq 10)$$

$$D_2:-\frac{1}{3}x<y<-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}\ (0<x+3y<10),\ D_3:y\leqq -\frac{1}{3}x\ (x+3y\leqq 0)$$

ここで，線分 OA 上の点 Q に対し，線分 PQ の最小値を $d(\mathrm{P})$ とすると，点 P(5, 2) は，$5+3\cdot 2=11>10$ から領域 D_1 にあることより，

$$d(\mathrm{P})=\mathrm{AP}=\sqrt{(5-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{17}$$

(2)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ に対して，$d(\mathrm{P})$ を a, b の式で表すと，

(i)　点 P が領域 D_1 にある $(a+3b\geqq 10)$ のとき

$$d(\mathrm{P})=\mathrm{AP}=\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$$

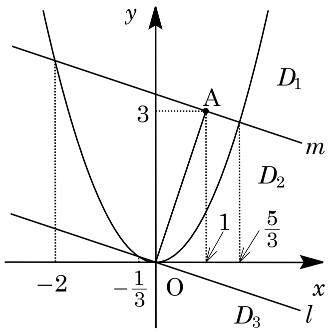
(ii)　点 P が領域 D_2 にある $(0<a+3b<10)$ のとき　直線 OA : $3x-y=0$ より，

$$d(\mathrm{P})=\frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}|3a-b|$$

(iii)　点 P が領域 D_3 にある $(a+3b\leqq 0)$ のとき

$$d(\mathrm{P})=\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$$

(3)　放物線 $y=x^2$ ……(＊)上に点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ をとる。



まず，(＊)と l の交点は $x^2=-\dfrac{1}{3}x$ より $x=0,\ -\dfrac{1}{3}$

また，(＊)と m の交点は $x^2=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$ より，

$$3x^2+x-10=0,\ (3x-5)(x+2)=0$$

これより，$x=\dfrac{5}{3},\ -2$ となる。

ここで，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$ となるのは，(2)から，

(i)　点 P が領域 D_1 にある $\left(a\leqq -2,\ \dfrac{5}{3}\leqq a\right)$ のとき

$$\sqrt{(a-1)^2+(a^2-3)^2}=\sqrt{10},\ a^4-5a^2-2a+10=10$$

これより，$a(a+2)(a^2-2a-1)=0$ となり，$a=0,\ -2,\ 1\pm\sqrt{2}$ である。

すると，$a\leqq -2,\ \dfrac{5}{3}\leqq a$ から，$a=-2,\ 1+\sqrt{2}$

(ii) 点 P が領域 D_2 にある$\left(-2<a<-\dfrac{1}{3},\ 0<a<\dfrac{5}{3}\right)$のとき

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\,3a-a^2\,\right|=\sqrt{10}\,,\ \ 3a-a^2=\pm 10\,,\ \ a^2-3a\pm 10=0$$

$a^2-3a+10=0$ は実数解をもたず，$a^2-3a-10=0$ は $(a+2)(a-5)=0$ から $a=-2,\ 5$ となるが $-2<a<-\dfrac{1}{3},\ 0<a<\dfrac{5}{3}$ を満たさない。

(iii) 点 P が領域 D_3 にある$\left(-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0\right)$のとき

$$\sqrt{a^2+a^4}=\sqrt{10}\,,\ \ a^2+a^4=10\,,\ \ a^2(a^2+1)=10$$

$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0$ から $0\leqq a^2(a^2+1)\leqq \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{10}{9}=\dfrac{10}{81}$ となり，満たす a は存在しない。

(i)～(iii)より，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$ を満たす点 P の x 座標は，-2 または$1+\sqrt{2}$ である。

［解　説］

点と線分の距離についての基本題ですが，量的には多めです。解答例では，直線 l と m によって分けられる領域を設定して，図形的な解き方をしました。