1

解答解説のページへ

log を自然対数, e をその底とする。次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき, $x-\dfrac{x^2}{2} \leqq \log(1+x) \leqq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$t \geqq 0$ とする。次の極限を t を用いて表せ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{nt}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n^2}$

(3)　(2)で求めた極限を $f(t)$ とおく。このとき, $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,dt < \frac{e^{5000}}{50}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

　n を 2 以上の整数とする。1 から 6 までの目のある 1 個のさいころを n 回続けて投げるとき，n 回目で初めて直前の回と同じ目が出る確率を P_n で表す。次の問いに答えよ。

(1)　P_n を n を用いて表せ。

(2)　$S_n = \sum_{k=2}^{n} P_k$ を n を用いて表せ。

(3)　$S_n \geqq \frac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ。

(4)　$E_n = \sum_{k=2}^{n} kP_k$ を n を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

p, q を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$p=7$，$q=11$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(2)　$p=6$，$q=9$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x, y の組は存在しないことを示せ。

(3)　i を虚数単位とする。自然数 n に対して，集合 X_n を

$$X_n=\left\{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \,\middle|\, k\text{ は整数}\right\}$$

と定める。また，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x, y の組が存在すると仮定する。このとき，集合 X_{pq} に属するすべての数は，X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されることを示せ。

(4)　集合 X_n は(3)で定めたものとする。複素数 $\cos\dfrac{2\pi}{pq}+i\sin\dfrac{2\pi}{pq}$ が X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されるとき，p と q は互いに素であることを示せ。

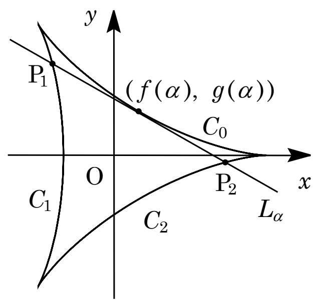
$\boxed{4}$

解答解説のページへ

実数 t に対して，

$$f(t)=2\cos t+\cos 2t,\quad g(t)=2\sin t-\sin 2t$$

とおく。t を媒介変数として $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される xy 平面上の曲線のうち，$0<t<\frac{2}{3}\pi$，$\frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi<t<2\pi$ の部分をそれぞれ C_0，C_1，C_2 とする。また，$0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たす定数 α に対して，点 $(f(\alpha),\ g(\alpha))$ における C_0 の接線を L_α とする。次の問いに答えよ。



C_0，C_1，C_2 の概形

(1)　次の等式を示せ。

$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2}+g(t)\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)$$

(2)　次の等式を示せ。

$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}=4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

(3)　接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ と表す。ただし $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。このとき，θ を α を用いて表せ。

(4)　L_α と C_1 の交点を P_1 とし，L_α と C_2 の交点を P_2 とするとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは α によらず一定であることを示せ。

1　　問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ において，$g(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ とおくと，

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1+(-1+x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geqq 0$$

すると，$x \geqq 0$ で $g(x) \geqq g(0) = 0$ となり，$\log(1+x) \geqq x - \dfrac{x^2}{2}$ ………①

また，$h(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とおくと，

$$h'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-x^2)+(x^2+x^3)-1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} \geqq 0$$

すると，$x \geqq 0$ で $h(x) \geqq h(0) = 0$ となり，$\log(1+x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ ………②

①②より，$x \geqq 0$ のとき，$x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \log(1+x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ ……③が成り立つ。

(2)　$t \geqq 0$ において，$P(n) = e^{nt}\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{-n^2}$ とおくと，

$$\log P(n) = \log e^{nt}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n^2} = nt - n^2\log\left(1+\frac{t}{n}\right) \cdots\cdots\cdots ④$$

$\dfrac{t}{n} \geqq 0$ なので，③から，$\dfrac{t}{n} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^2}{n^2} \leqq \log\left(1+\dfrac{t}{n}\right) \leqq \dfrac{t}{n} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^2}{n^2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t^3}{n^3}$ となり，

$$-nt + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{n} \leqq -n^2\log\left(1+\frac{t}{n}\right) \leqq -nt + \frac{1}{2}t^2$$

④から，$\dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t^3}{n} \leqq \log P(n) \leqq \dfrac{1}{2}t^2$ となり，$n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t^3}{n} \to 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} \log P(n) = \frac{1}{2}t^2$$

対数関数は定義域で連続なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} e^{nt}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$ である。

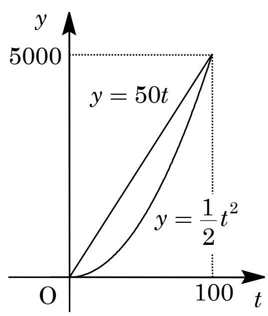
(3)　(2)から $f(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ となり，$0 \leqq t \leqq 100$ において，

$$50t - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t(100-t) \geqq 0$$

これより $\dfrac{1}{2}t^2 \leqq 50t$ となり，$e^{\frac{1}{2}t^2} \leqq e^{50t}$ から，

$$\int_0^{100} f(t)\,dt = \int_0^{100} e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt \leqq \int_0^{100} e^{50t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{50}e^{50t}\right]_0^{100} = \frac{1}{50}(e^{5000}-1) < \frac{e^{5000}}{50}$$



［解　説］

微積分の総合問題です。(1)と(2)は頻出タイプですが，(3)は誘導がないために難度が高くなっています。解答例では，右上の図から被積分関数の評価式を作っています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　さいころを n 回投げるとき，n 回目で初めて直前の回と同じ目が出るのは，1 回目は任意の目，k 回目 $(2 \leqq k \leqq n-1)$ は $k-1$ 回目と異なる目，n 回目は $n-1$ 回目と同じ目が出る場合より，その確率 P_n は，$n \geqq 3$ で，

$$P_n = 1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

なお，この式は $n=2$ のときも成立している。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} P_k = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{1-\frac{5}{6}} = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(3)　$S_n \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \geqq \dfrac{1}{2}$ より $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \leqq \dfrac{1}{2}$ となり，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} \geqq 1,\quad \frac{6^{n-1}}{2\cdot5^{n-1}} \geqq 1 \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，n の増加にともなって，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6}{5}\right)^{n-1}$ は単調に増加するので，右表から，$n \geqq 5$ のとき $(*)$ を満たす。

n	6^{n-1}	$2\cdot5^{n-1}$
2	6	10
3	36	50
4	216	250
5	1296	1250

よって，$S_n \geqq \dfrac{1}{2}$ となる最小の n は 5 である。

(4)　$E_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} kP_k = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{1}{6}\cdot2\cdot1+\frac{1}{6}\cdot3\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot4\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\frac{1}{6}\cdot n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$

すると，$n \geqq 3$ で，

$$E_n - \frac{5}{6}E_n = \frac{1}{6}\cdot2\cdot1+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}-\frac{1}{6}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$E_n = 2\cdot1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}-n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 2+\frac{5}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{1-\frac{5}{6}}-n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$= 2+5\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}-n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 7-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

なお，この式は $n=2$ のときも成立している。

［解　説］

確率を題材とした数列の和に関する基本題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$7x+11y=1$ を満たす 1 組の整数$(x,\ y)$は，$(x,\ y)=(-3,\ 2)$ である。

(2)　$6x+9y=1$ は $3(2x+3y)=1$ と変形すると，x, y が整数のとき，左辺は 3 の倍数，右辺は 3 の倍数でないので，満たす$(x,\ y)$の組は存在しない。

(3)　自然数 p, q に対し，$px+qy=1$ を満たす整数を$(x,\ y)=(x_0,\ y_0)$とおくと，

$$px_0+qy_0=1,\ \frac{x_0}{q}+\frac{y_0}{p}=\frac{1}{pq}\cdots\cdots\cdots①$$

このとき，k を整数とすると，①から，

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq}\right)^k&=\left\{\cos 2\pi\left(\frac{x_0}{q}+\frac{y_0}{p}\right)+i\sin 2\pi\left(\frac{x_0}{q}+\frac{y_0}{p}\right)\right\}^k\\&=\left\{\left(\cos\frac{2\pi}{q}x_0+i\sin\frac{2\pi}{q}x_0\right)\left(\cos\frac{2\pi}{p}y_0+i\sin\frac{2\pi}{p}y_0\right)\right\}^k\\&=\left(\cos\frac{2\pi}{p}y_0+i\sin\frac{2\pi}{p}y_0\right)^k\left(\cos\frac{2\pi}{q}x_0+i\sin\frac{2\pi}{q}x_0\right)^k\\&=\left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^{ky_0}\left(\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}\right)^{kx_0}\end{aligned}$$

したがって，集合 $X_n=\left\{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \,\middle|\, k\text{ は整数}\right\}$ とするとき，集合 X_{pq} に属するすべての数は，X_p に属する数と X_q に属する数の積で表される。

(4)　$\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq}$ が X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されるとき，

$$\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq}=\left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^l\left(\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}\right)^m\quad(l,\ m\text{ は整数})$$

$$\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq}=\cos\left(\frac{2\pi l}{p}+\frac{2\pi m}{q}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi l}{p}+\frac{2\pi m}{q}\right)$$

これより，j を整数として，$\frac{2\pi}{pq}=\frac{2\pi l}{p}+\frac{2\pi m}{q}+2\pi j$ となり，

$$\frac{1}{pq}=\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+j,\ ql+pm+pqj=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，p と q の最大公約数を g として，$p=gp'$，$q=gq'$ とおくと，②から，

$$gq'l+gp'm+g^2p'q'j=1,\ g(q'l+p'm+gp'q'j)=1$$

これより g は 1 の約数となり $g=1$ である。すなわち p と q は互いに素である。

［解 説］

極形式の複素数の集合に不定方程式を絡ませた問題です。後半では，問題文を理解する力が問われています。

4　問題のページへ

(1)　$f(t)=2\cos t+\cos 2t$，$g(t)=2\sin t-\sin 2t$ に対して，

$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2}+g(t)\cos\frac{\alpha}{2}=(2\cos t+\cos 2t)\sin\frac{\alpha}{2}+(2\sin t-\sin 2t)\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\left(\sin t\cos\frac{\alpha}{2}+\cos t\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\left(\sin 2t\cos\frac{\alpha}{2}-\cos 2t\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①より，$f(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}+g(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{3\alpha}{2}$ となり，

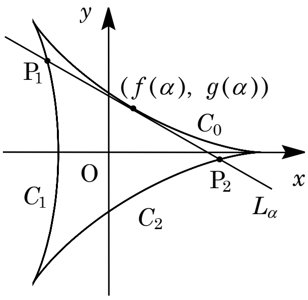
$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\frac{3\alpha}{2}=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-2\sin\frac{2t+\alpha}{2}\cos\frac{2t-2\alpha}{2}$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\cos(t-\alpha)=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\{1-\cos(t-\alpha)\}$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\sin^2\frac{t-\alpha}{2}=4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　$x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される曲線について，$0<t<\frac{2}{3}\pi$，$\frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi<t<2\pi$ の部分をそれぞれ C_0，C_1，C_2 とすると，



$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{2\cos t-2\cos 2t}{-2\sin t-2\sin 2t}=-\frac{\cos t-\cos 2t}{\sin t+\sin 2t}$$

ここで，点 $(f(\alpha),\ g(\alpha))$ $\left(0<\alpha<\frac{2}{3}\pi\right)$ における C_0 の接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\tan\theta=-\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}=-\frac{2\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=-\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

すると，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{3}<-\frac{\alpha}{2}<0$ より，$\theta=-\frac{\alpha}{2}$ である。

(4)　(3)から，$L_\alpha : y-g(\alpha)=-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)(x-f(\alpha))$ となり，$x=f(t)$，$y=g(t)$ と連立すると，$g(t)-g(\alpha)=-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)(f(t)-f(\alpha))$ となり，

$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

すると，②より，$4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)=0$ となり，

$$\sin\frac{t-\alpha}{2}=0\quad\text{または}\quad\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)=0\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$\dfrac{2}{3}\pi < t < \dfrac{4}{3}\pi$ のとき　$0 < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ から $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{3}$ となり，

$$0 < \frac{t-\alpha}{2} < \frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{2}{3}\pi < t + \frac{\alpha}{2} < \frac{5}{3}\pi$$

このとき，$\sin\dfrac{t-\alpha}{2} > 0$ となるので，③から $\sin\left(t + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0$，すなわち $t + \dfrac{\alpha}{2} = \pi$ より $t = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$ である。すると，点 P_1 の座標は，

$$\left(f\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right),\ g\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \left(-2\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha,\ 2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\right)$$

(ii)　$\dfrac{4}{3}\pi < t < 2\pi$ のとき　$0 < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ から $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{3}$ となり，

$$\frac{\pi}{3} < \frac{t-\alpha}{2} < \pi,\ \ \frac{4}{3}\pi < t + \frac{\alpha}{2} < \frac{7}{3}\pi$$

このとき，$\sin\dfrac{t-\alpha}{2} > 0$ となるので，③から $\sin\left(t + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0$，すなわち $t + \dfrac{\alpha}{2} = 2\pi$ より $t = 2\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ である。すると，点 P_2 の座標は，

$$\left(f\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right),\ g\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \left(2\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha,\ -2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\right)$$

(i)(ii)より，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2{}^2 = \left(4\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = 16\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = 16$

したがって，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = 4$ となり，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは α によらず一定である。

［解 説］

パラメータ曲線についての総合問題です。4 つの設問が 1 つのストーリーを描くように構成されています。ただ，計算量はかなりありますが。