1

解答解説のページへ

区間$0 \leqq x \leqq 1$上の連続関数$f(x)$と自然数 n に対し，$I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$とおく。また，$D = \displaystyle\lim_{n \to \infty} n\left(I_n - \int_0^1 f(x)dx \right)$とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x) = x^2$のときDの値を求めよ。

(2)　$f(x) = x^3$のときDの値を求めよ。

(3)　$f(x) = e^x$のときDの値を求めよ。

ただし，$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{n} + a_n$とおくとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^2 a_n = \frac{1}{2}$となることを用いてよい。

2

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とする。単位円に内接する正 n 角形の面積を A_n，この正 n 角形の各辺の中点を順に結んでできる正 n 角形の面積を B_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) A_n を n を用いて表せ。

(2) B_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

(4) $n \geqq 32$ のとき，不等式 $\dfrac{B_n}{A_n} > \dfrac{99}{100}$ が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

xyz 空間の中で，方程式 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)$ で表される図形は，放物線を y 軸のまわりに回転して得られる曲面である。これを S とする。また，方程式 $y=x+\dfrac{1}{2}$ で表される図形は, xz 平面と 45 度の角度で交わる平面である。これを H とする。さらに, S と H が囲む部分を K とおくと, K は不等式 $\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)\leqq y\leqq x+\dfrac{1}{2}$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ の全体となる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) K を平面 $z=t$ で切ったときの切り口が空集合でないような実数 t の範囲を求めよ。

(2) (1)の切り口の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3) K の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

n 個の球が入った箱から球を 1 つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返す。ただし $k \leqq n$ とする。各回について，どの球が取り出されるかは同様に確からしいとする。取り出した k 個の球がすべて相異なる確率を $P(n,\ k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$P(n,\ k)$ を n と k を用いて表せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\bigl(P(n,\ k)\bigr)^n$ を $Q(k)$ とおくとき，$Q(k)$ を k を用いて表せ。ただし公式 $\displaystyle\lim_{x\to+0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$ を用いてよい。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log Q(k)}$ の値を求めよ。ただし log は自然対数を表す。

1

問題のページへ

(1) $I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)$，$J_n=n\Big(I_n-\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\Big)$とすると，$D=\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n$である。

さて，$f(x)=x^2$のとき，$I_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$$J_n=n\Big\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1\Big\}=n\Big(\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}-\frac{1}{3}\Big)=\frac{3n+1}{6n}$$

よって，$D=\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n}=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\Big)=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=x^3$のとき，$I_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^3=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

$$J_n=n\Big\{\frac{(n+1)^2}{4n^2}-\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^1\Big\}=n\Big(\frac{n^2+2n+1}{4n^2}-\frac{1}{4}\Big)=\frac{2n+1}{4n}$$

よって，$D=\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n}=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\Big)=\frac{1}{2}$

(3) $f(x)=e^x$のとき，$I_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}\Big\{\Big(e^{\frac{1}{n}}\Big)^n-1\Big\}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{e-1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

$$J_n=n\Big(\frac{e-1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}-\Big[e^x\Big]_0^1\Big)=(e-1)\Big(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}-n\Big)$$

ここで，$e^{\frac{1}{n}}=1+\dfrac{1}{n}+a_n$とおくと，$\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=\dfrac{1+\frac{1}{n}+a_n}{1+\frac{1}{n}+a_n-1}=\dfrac{na_n+n+1}{na_n+1}$となり，

$$J_n=(e-1)\Big(\frac{na_n+n+1}{na_n+1}-n\Big)=(e-1)\cdot\frac{na_n+1-n^2a_n}{na_n+1}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\frac{1}{2}$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\Big(n^2a_n\cdot\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{2}\cdot 0=0$なので，

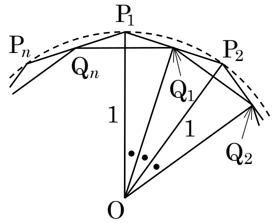
$$D=\lim_{n\to\infty}J_n=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1-n^2a_n}{na_n+1}=(e-1)\cdot\frac{1-\frac{1}{2}}{1}=\frac{e-1}{2}$$

［解 説］

数列の極限の問題です。(1)と(2)は基本的です。(3)は問題文に記された誘導の利用方法がポイントになっています。

2

問題のページへ



(1)　単位円に内接する正 n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の面積を A_n とすると，$OP_1 = OP_2 = 1$，$\angle P_1OP_2 = \dfrac{2\pi}{n}$ より，

$$A_n = n\cdot(\triangle OP_1P_2) = n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

(2)　正 n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の各辺の中点を順に結んでできる正 n 角形 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ の面積を B_n とすると，$\angle P_1OQ_1 = \dfrac{\pi}{n}$ から，

$OQ_1 = OQ_2 = 1\cdot\cos\dfrac{\pi}{n} = \cos\dfrac{\pi}{n}$，$\angle Q_1OQ_2 = \dfrac{2\pi}{n}$ となり，

$$B_n = n\cdot(\triangle OQ_1Q_2) = n\cdot\left(\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}\cos^2\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}$$

(3)　$\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $\theta\to +0$ となり，(2)から，

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{\theta\to+0}\frac{\pi}{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta = \lim_{\theta\to+0}\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta} = \pi\cdot 1^2\cdot 1 = \pi$$

(4)　(1)(2)より，$\dfrac{B_n}{A_n} = \dfrac{\dfrac{n}{2}\cos^2\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}}{\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}} = \cos^2\dfrac{\pi}{n} = 1-\sin^2\dfrac{\pi}{n}$ ………①

ここで，$n\geqq 32$ のとき $0 < \dfrac{\pi}{n} \leqq \dfrac{\pi}{32}$ となり，$0 < \sin\dfrac{\pi}{n} \leqq \sin\dfrac{\pi}{32}$ ………②

さらに，一般的に $\varphi > 0$ のとき $\sin\varphi < \varphi$ であるので，$\sin\dfrac{\pi}{32} < \dfrac{\pi}{32}$ ………③

①②③より，$\dfrac{B_n}{A_n} \geqq 1-\sin^2\dfrac{\pi}{32} > 1-\left(\dfrac{\pi}{32}\right)^2$ となり，$3.1 < \pi < 3.2$ から，

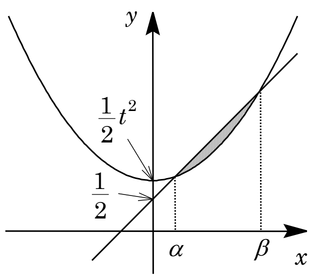
$$\frac{B_n}{A_n} > 1-\left(\frac{3.2}{32}\right)^2 = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1-\frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

［解　説］

(3)までは，図形と極限に関する頻出題です。ただ，(4)の不等式の証明については，余弦の半角公式などを適用したりして時間を費やしましたがうまくいかず，正弦の方に変換して③式で押さえ込みました。

3

問題のページへ



(1)　立体$K:\frac{1}{2}(x^2+z^2)\leqq y\leqq x+\frac{1}{2}$を平面$z=t$で切ったときの切り口は，

$$\frac{1}{2}(x^2+t^2)\leqq y\leqq x+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

この切り口が存在する条件は，$\frac{1}{2}(x^2+t^2)\leqq x+\frac{1}{2}$を満たす$x$が存在することより，

$$x^2+t^2\leqq 2x+1,\ x^2-2x+t^2-1\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

②の解が存在するのは，$x^2-2x+t^2-1=0\cdots\cdots③$が実数解をもつことに対応し，

$$D/4=1-(t^2-1)=2-t^2\geqq 0$$

よって，$t^2-2\leqq 0$から，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$となる。

(2)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$のとき，③の解を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq\beta)$とおくと，

$$\alpha=1-\sqrt{2-t^2},\ \beta=1+\sqrt{2-t^2}$$

そこで，①で表される切り口の面積を$S(t)$とすると，

$$S(t)=\int_\alpha^\beta\left\{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x^2+t^2)\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x^2-2x+t^2-1)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{2-t^2}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-t^2}\right)^3=\frac{2}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}$$

(3)　Kの体積Vは，$S(-t)=S(t)$に注意すると，

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}S(t)dt=2\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-t^2}\right)^3dt$$

ここで，$t=\sqrt{2}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$とおくと，$dt=\sqrt{2}\cos\theta d\theta$となり，

$$V=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2-2\sin^2\theta}\right)^3\cdot\sqrt{2}\cos\theta d\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)d\theta=\frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}\theta+\sin2\theta+\frac{1}{8}\sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

［解　説］

立体の体積を求める標準題です。問題文に丁寧な図形的説明がついています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　n 個の球が入った箱から球を 1 つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返し，取り出した k 個の球がすべて相異なる確率を $P(n,\ k)$ とすると，

$$P(n,\ k)=\frac{{}_n\mathrm{P}_k}{n^k}=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}$$

(2)　$$\left(P(n,\ k)\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$ より，$k\geqq 2$ で $x=\dfrac{l}{n}$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{l}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{l}{n}\right)^{\frac{n}{l}}\right\}^l=(e^{-1})^l=e^{-l}$$

すると，$Q(k)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(P(n,\ k)\right)^n$ より，

$$Q(k)=e^{-1}\cdot e^{-2}\cdots e^{-(k-1)}=e^{-\{1+2+\cdots+(k-1)\}}=e^{-\frac{1}{2}k(k-1)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$k=1$ のときは $P(n,\ 1)=1$ となり，このときも$(*)$は成立している。

(3)　$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log Q(k)}=-\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k(k-1)}=-2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=-2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n}-2$$ となり，

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log Q(k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log Q(k)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-2\right)=-2$$

［解　説］

確率を題材とした無限級数の問題です。(2)の極限値は，問題文が強力なヒントになっています。なお，題意から $k\geqq 2$ を前提としてもよいでしょう。