**1**

解答解説のページへ

$\alpha$ は $0<\alpha<\pi$ を満たす実数とする。$xy$ 平面において，$y=\sin x$ のグラフと $y=\sin(x-\alpha)$ のグラフの交点のうち，$x$ 座標が正で最小のものを P とおく。次の問いに答えよ。

(1) P の座標を $\alpha$ を用いて表せ。

(2) P の $x$ 座標を $c$ とする。曲線 $y=\sin x$ $(\alpha \leqq x \leqq c)$，曲線 $y=\sin(x-\alpha)$ $(\alpha \leqq x \leqq c)$ と直線 $x=\alpha$ とで囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V(\alpha)$ を求めよ。

(3) $\alpha$ が $0<\alpha<\pi$ の範囲を動くときの $V(\alpha)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$p$, $q$ を実数とする。3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ は 1 個の実数解 $b$ と 2 個の虚数解をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 虚数解の 1 つを $\alpha$ とするとき，$\alpha$ と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ。

(2) $\alpha$ の実部を $r$ とする。$|\alpha-\overline{\alpha}|=|\alpha-b|=2\sqrt{3}$ のとき，$|r-b|$ を求めよ。

(3) (2)の仮定の下で，可能な実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

**3**

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$1 < m \leqq n$ を満たす自然数 $m$, $n$ に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1}$$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$ の整数部分を求めよ。ただし，実数 $x$ に対して $a$ が $x$ の整数部分であるとは，$a$ が整数であって $a \leqq x < a+1$ が成り立つことをいう。また，正の実数 $x$ の自然対数を $\log x$ とし，$\log 2 = 0.69$，$\log 3 = 1.10$，$\log 2020 = 7.61$ とする。

**4**

解答解説のページへ

座標空間内に 3 点 $A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 3,\ 0)$，$C(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ をとる。$\triangle ABC$ の重心を通り $xy$ 平面に垂直な直線を $l$ とする。また，点 $P(p,\ q,\ r)$ は，$r>0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=4$ を満たしているものとする。次の問いに答えよ。

(1) $p$ および $r$ を $q$ を用いて表せ。また，$q$ がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 線分 BP の中点を M とする。また，$l$ 上に点 N を $\overrightarrow{BP}$ と $\overrightarrow{MN}$ が垂直になるようにとる。N の座標を $q$ を用いて表せ。

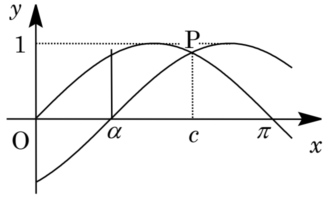
(3) N の $z$ 座標が最小になるときの $q$ の値を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$0<\alpha<\pi$ のとき，$y=\sin x$ ……①と $y=\sin(x-\alpha)$ ……②を連立して，

$$\sin x-\sin(x-\alpha)=0,\ \ 2\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}=0$$




$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$ となり，$\cos\left(x-\dfrac{\alpha}{2}\right)=0$

$$x-\frac{\alpha}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n\text{ は整数})$$

すると，$x$ が正で最小のものは $x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$ となり，このとき①から，

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}$$

よって，①と②のグラフの交点 P の座標は $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2},\ \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$ となる。

(2)　$c=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$ として，$\alpha\leqq x\leqq c$ において，①と②のグラフおよび直線 $x=\alpha$ とで囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(\alpha)$ とすると，

$$V(\alpha)=\pi\int_\alpha^c\sin^2x\,dx-\pi\int_\alpha^c\sin^2(x-\alpha)\,dx$$

$$=\pi\int_\alpha^c\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2(x-\alpha)}{2}\right\}dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_\alpha^c\{\cos 2x-\cos 2(x-\alpha)\}dx=\frac{\pi}{2}\cdot 2\sin\alpha\int_\alpha^c\sin(2x-\alpha)\,dx$$

$$=\pi\sin\alpha\left[-\frac{1}{2}\cos(2x-\alpha)\right]_\alpha^c=-\frac{\pi}{2}\sin\alpha\{\cos(2c-\alpha)-\cos\alpha\}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\sin\alpha\{\cos(\pi+\alpha-\alpha)-\cos\alpha\}=\frac{\pi}{2}\sin\alpha(\cos\alpha+1)$$

(3)　$0<\alpha<\pi$ において，(2)から，

$$V'(\alpha)=\frac{\pi}{2}\{\cos\alpha(\cos\alpha+1)+\sin\alpha(-\sin\alpha)\}=\frac{\pi}{2}(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)$$

$$=\frac{\pi}{2}(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)$$

すると，$V(\alpha)$ の値の増減は右表のようになり，$V(\alpha)$ の最大値は，

$$V\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{8}\sqrt{3}\pi$$

| $\alpha$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(\alpha)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
| $V(\alpha)$ | | ↗ | | ↘ | |

［解　説］

回転体の体積を題材とした微積分の基本題です。計算量は標準的です。

## 2

問題のページへ

(1)　$p, q$ を実数として，3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ ……①に対し，虚数解の 1 つを $\alpha$ とするとき，$\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q=0$ が成り立ち，

$$\overline{\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q}=\overline{0},\ \overline{\alpha^3}-3\overline{\alpha^2}+p\overline{\alpha}+q=0,\ (\overline{\alpha})^3-3(\overline{\alpha})^2+p\overline{\alpha}+q=0$$

これより，$\overline{\alpha}$ も①を満たし，①の 2 個の虚数解は $\alpha$ と $\overline{\alpha}$ である。

(2)　$\alpha$ の実部を $r$，虚部を $s\,(s\neq 0)$ とすると，$\alpha=r+si$，$\overline{\alpha}=r-si$ となる。

ここで，$|\alpha-\overline{\alpha}|=|\alpha-b|=2\sqrt{3}$ より，$|2si|=|(r-b)+si|=2\sqrt{3}$ となり，

$$|s|=\sqrt{3},\ \sqrt{(r-b)^2+s^2}=2\sqrt{3}$$

これより，$(r-b)^2+3=12$ となり，$(r-b)^2=9$ から $|r-b|=3$ である。

(3)　3 次方程式①に対して，解と係数の関係を適用すると，

$$\alpha+\overline{\alpha}+b=3\ \cdots\cdots\text{②},\ \alpha\overline{\alpha}+b\alpha+b\overline{\alpha}=p\ \cdots\cdots\text{③},\ \alpha\overline{\alpha}b=-q\ \cdots\cdots\text{④}$$

ここで，(2)から，$s=\pm\sqrt{3}$，$r-b=\pm 3$（複号任意）なので，

(i)　$r-b=3$ のとき　$\alpha=b+3\pm\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=b+3\mp\sqrt{3}i$（以下，複号同順）

②より，$2(b+3)+b=3$ から $b=-1$ となり，$\alpha=2\pm\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=2\mp\sqrt{3}i$

③より $p=(4+3)+(-1)\cdot 4=3$，④より $q=-(4+3)\cdot(-1)=7$

(ii)　$r-b=-3$ のとき　$\alpha=b-3\pm\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=b-3\mp\sqrt{3}i$（以下，複号同順）

②より，$2(b-3)+b=3$ から $b=3$ となり，$\alpha=\pm\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=\mp\sqrt{3}i$

③より $p=3+3\cdot 0=3$，④より $q=-3\cdot 3=-9$

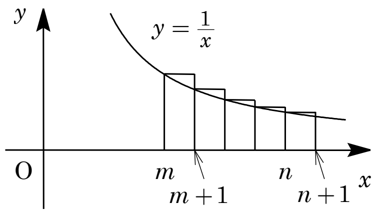
(i)(ii)より，$(p,\ q)=(3,\ 7),\ (3,\ -9)$ である。

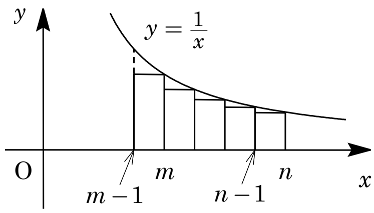
［解　説］

3 次方程式についての基本的な問題です。上の解法では，解と係数の関係がポイントになっています。

**3**

問題のページへ




(1)　単調に減少する関数 $y=\dfrac{1}{x}$ に対し，$1<m\leqq n$ を満たす自然数 $m$，$n$ をとり，右上図において面積を比較すると，

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}$$

同様に，右下図から，

$$\int_{m-1}^{n}\frac{dx}{x}>\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}$$

さて，$x=t-1$ とおくと，$dx=dt$ となり，

$$\int_{m-1}^{n}\frac{dx}{x}=\int_m^{n+1}\frac{dt}{t-1}$$

さらに，$\displaystyle\int_m^{n+1}\frac{dt}{t-1}=\int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}$ であることに注意すると，

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}<\int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，①より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{2020}\frac{1}{k}<1+\int_2^{2021}\frac{dx}{x-1}$ となり，

$$\int_2^{2021}\frac{dx}{x-1}=\big[\log|x-1|\big]_2^{2021}=\log 2020-\log 1=7.61$$

これより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}<1+7.61=8.61\ \cdots\cdots\cdots②$

また，①より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2020}+\sum_{k=3}^{2019}\frac{1}{k}>1.5+\frac{1}{2020}+\int_3^{2020}\frac{dx}{x}$ となり，

$$\int_3^{2020}\frac{dx}{x}=\big[\log|x|\big]_3^{2020}=\log 2020-\log 3=7.61-1.10=6.51$$

これより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}>1.5+\frac{1}{2020}+6.51=8.01+\frac{1}{2020}>8.01\ \cdots\cdots\cdots③$

②③より，$\displaystyle 8.01<\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}<8.61$ となるので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$ の整数部分は 8 である。

［解　説］

(1)は有名な面積比較による不等式の証明です。それを利用して(2)の整数部分を求めるわけですが，不等式①はストレートに利用することはできず，右側の不等式から試行錯誤が必要になります。ただ，その手掛かりは与えられていて，$\log 3$ と $\log 2020$ の値が対応します。$\log 2$ の値は必要ありませんでしたが……。

**4**

問題のページへ

(1)　$\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-\sqrt{3},\ 3,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(p-\sqrt{3},\ q,\ r),\ \overrightarrow{\mathrm{CP}}=(p+\sqrt{3},\ q,\ r)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ から $-\sqrt{3}(p-\sqrt{3})+3q=0$ となり，$p=\sqrt{3}q+\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=4$ から $(p-\sqrt{3})(p+\sqrt{3})+q^2+r^2=4$，すなわち $p^2+q^2+r^2=7$ より，

$$3(q+1)^2+q^2+r^2=7,\ r^2=-4q^2-6q+4$$

ここで，$r>0$ から $-4q^2-6q+4>0$ となり，$2q^2+3q-2<0$ より，

$$(q+2)(2q-1)<0,\ -2<q<\frac{1}{2}$$

このもとで，$r=\sqrt{-4q^2-6q+4}$ である。

(2)　線分 BP の中点 M は $\mathrm{M}\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q+3}{2},\ \dfrac{r}{2}\right)$となり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心$(0,\ 1,\ 0)$を通り $xy$ 平面に垂直な直線 $l$ 上の点 N は $\mathrm{N}(0,\ 1,\ z)$ と表せるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(p,\ q-3,\ r),\ \overrightarrow{\mathrm{MN}}=\left(-\frac{p}{2},\ \frac{-q-1}{2},\ z-\frac{r}{2}\right)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ より $-\dfrac{p^2}{2}-\dfrac{(q-3)(q+1)}{2}+rz-\dfrac{r^2}{2}=0$ となり，(1)から，

$$2rz=p^2+q^2-2q-3+r^2=7-2q-3=-2q+4$$

よって，$z=\dfrac{-q+2}{r}=\dfrac{-q+2}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}$ から，$\mathrm{N}\left(0,\ 1,\ \dfrac{-q+2}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}\right)$である。

(3)　$-2<q<\dfrac{1}{2}$ において，$z=\dfrac{-q+2}{\sqrt{-4q^2-6q+4}}=\sqrt{\dfrac{(2-q)^2}{2(q+2)(1-2q)}}$

ここで，$f(q)=\dfrac{(2-q)^2}{(q+2)(1-2q)}$ とおき，両辺に対数をとると，

$$\log f(q)=2\log(2-q)-\log(q+2)-\log(1-2q)$$

$$\frac{f'(q)}{f(q)}=-\frac{2}{2-q}-\frac{1}{q+2}+\frac{2}{1-2q}$$
$$=\frac{11q+2}{(2-q)(q+2)(1-2q)}$$

| $q$ | $-2$ | $\cdots$ | $-\frac{2}{11}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(q)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(q)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

すると，$f(q)$の増減は右表のようになり，$z=\sqrt{\dfrac{f(q)}{2}}$ から，$q=-\dfrac{2}{11}$ のとき N の $z$ 座標は最小になる。

［解　説］

空間ベクトルが題材になっていますが，上の解答例は，その意味を考えずに，計算で押し通したものです。ただ，計算量はやや多めです。