1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつための a, b の条件を求めよ。

(2)　(1)の条件が成り立つとする。このとき，$f(x)$ の極大値の絶対値と極小値の絶対値が等しくなるための a, b の条件を求めよ。

(3)　(1)と(2)の条件を同時に満たす実数の組 $(a,\ b)$ の集合を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

p，q を実数とする。3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ は 1 個の実数解 b と 2 個の虚数解をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 虚数解の 1 つを α とするとき，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ。

(2) α の実部を r とする。$\alpha=r+\sqrt{3}i$ かつ $(\alpha-b)(\overline{\alpha}-b)=12$ のとき，$r-b$ がとり得る値をすべて求めよ。

(3) (2)の仮定の下で，可能な実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を，$a_0=1$，$a_n=a_{n-1}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　mを自然数とするとき，$a_{2m-2}>a_{2m}$，$a_{2m-1}<a_{2m+1}$を示せ。

(2)　$n\geqq 2$のとき，$0<a_n<1$を示せ。

$\boxed{4}$　　解答解説のページへ

O を原点とする座標平面において，C_1 は x 軸に接する半径 2 の円で，その中心 A の x 座標 a は $2<a\leqq 4$ を満たすとする。また，C_2 は y 軸および C_1 に接する半径 1 の円で，その中心 B の y 座標 b は $b\geqq 2$ を満たすとする。さらに，C_1 と C_2 の接点 P を通る C_1，C_2 の共通接線 l の傾きは 2 であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　a と b を求めよ。

(2)　l の方程式を求めよ。

(3)　$\triangle$OAB の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ に対して，$f'(x)=3x^2+6ax+3b=3(x^2+2ax+b)$

　$f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことより，その判別式 $D/4=a^2-b>0$ から，$b<a^2$ ……①である。

(2)　$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha+\beta=-2a\,,\ \ \alpha\beta=b\ \cdots\cdots\cdots ②$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

　ここで，$f(\alpha)>f(\beta)$ かつ $|f(\alpha)|=|f(\beta)|$ なので，$f(\alpha)=-f(\beta)$ となり，

$$f(\alpha)+f(\beta)=0\,,\ \ \alpha^3+\beta^3+3a(\alpha^2+\beta^2)+3b(\alpha+\beta)=0$$

　②から，$(-2a)^3-3b\cdot(-2a)+3a\{(-2a)^2-2b\}+3b\cdot(-2a)=0$

　まとめると，$4a^3-6ab=0$ となり，$a(2a^2-3b)=0$

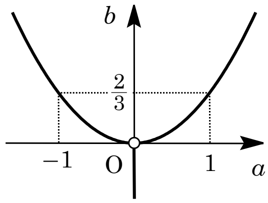
(i)　$a=0$ のとき　①から $b<0$ である。

(ii)　$a\neq 0$ のとき　$2a^2-3b=0$ から $b=\dfrac{2}{3}a^2$ である。このとき①は満たしている。

(3)　求める条件は，(2)から，

$$「a=0 \text{ かつ } b<0」\text{または}「a\neq 0 \text{ かつ } b=\frac{2}{3}a^2」$$

　これを，ab 平面上に図示すると，右図の太線部である。ただし，白丸は除く。



［解　説］

微分と増減についての基本的な問題です。ただ，詰めの作業がやや複雑です。

2

問題のページへ

(1)　p, q を実数として，3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ ……①に対し，虚数解の 1 つを α とするとき，$\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q=0$ が成り立ち，

$$\overline{\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q}=\overline{0},\ \overline{\alpha^3}-3\overline{\alpha^2}+p\overline{\alpha}+q=0,\ (\overline{\alpha})^3-3(\overline{\alpha})^2+p\overline{\alpha}+q=0$$

これより，$\overline{\alpha}$ も①を満たし，①の 2 個の虚数解は α と $\overline{\alpha}$ である。

(2)　①の実数解 b，虚数解 α，$\overline{\alpha}$ に対し，$\alpha=r+\sqrt{3}i$，$(\alpha-b)(\overline{\alpha}-b)=12$ とすると，

$$(\alpha-b)(\overline{\alpha-b})=12,\ |\alpha-b|^2=12,\ |r-b+\sqrt{3}i|^2=12$$

これより，$(r-b)^2+3=12$ となるので，$r-b=\pm3$ である。

(3)　3 次方程式①に対して，解と係数の関係を適用すると，

$$\alpha+\overline{\alpha}+b=3\ \cdots\cdots\cdots②,\ \alpha\overline{\alpha}+b\alpha+b\overline{\alpha}=p\ \cdots\cdots\cdots③,\ \alpha\overline{\alpha}b=-q\ \cdots\cdots\cdots④$$

(i)　$r-b=3$ のとき　$\alpha=b+3+\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=b+3-\sqrt{3}i$

②より，$2(b+3)+b=3$ から $b=-1$ となり，$\alpha=2+\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=2-\sqrt{3}i$

③より $p=(4+3)+(-1)\cdot4=3$，④より $q=-(4+3)\cdot(-1)=7$

(ii)　$r-b=-3$ のとき　$\alpha=b-3+\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=b-3-\sqrt{3}i$

②より，$2(b-3)+b=3$ から $b=3$ となり，$\alpha=\sqrt{3}i$，$\overline{\alpha}=-\sqrt{3}i$

③より $p=3+3\cdot0=3$，④より $q=-3\cdot3=-9$

(i)(ii)より，$(p,\ q)=(3,\ 7)$，$(3,\ -9)$ である。

［解　説］

3 次方程式についての基本的な問題です。上の解法では，複素数の絶対値および解と係数の関係がポイントになっています。やや範囲外ですが。

3

問題のページへ

(1)　$a_0=1$，$a_n=a_{n-1}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定められる数列$\{a_n\}$に対して，mを自然数とするとき，

$$a_{2m+1}=a_{2m}+\frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)!}=a_{2m}-\frac{1}{(2m+1)!}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$a_{2m}=a_{2m-1}+\frac{(-1)^{2m}}{(2m)!}=a_{2m-1}+\frac{1}{(2m)!}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$a_{2m-1}=a_{2m-2}+\frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)!}=a_{2m-2}-\frac{1}{(2m-1)!}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$a_{2m}-a_{2m-2}=a_{2m-1}+\dfrac{1}{(2m)!}-a_{2m-2}=\dfrac{1}{(2m)!}-\dfrac{1}{(2m-1)!}<0$

①②より，$a_{2m+1}-a_{2m-1}=a_{2m}-\dfrac{1}{(2m+1)!}-a_{2m-1}=\dfrac{1}{(2m)!}-\dfrac{1}{(2m+1)!}>0$

よって，$a_{2m-2}>a_{2m}$，$a_{2m-1}<a_{2m+1}$が成立する。

(2)　$a_1=a_0+\dfrac{(-1)^1}{1!}=1-1=0$となり，(1)の結果から，

$$1=a_0>a_2>a_4>a_6>\cdots\cdots,\ \ 0=a_1<a_3<a_5<a_7<\cdots\cdots$$

そして，①から，$a_{2m}>a_{2m+1}$であることと考え合わせると，

$$1=a_0>a_{2m}>a_{2m+1}>a_1=0$$

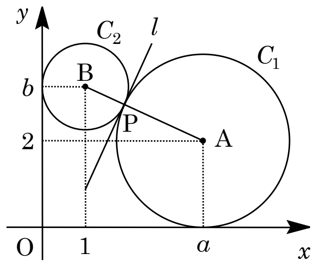
以上より，$n\geqq 2$のとき$0<a_n<1$である。

［解　説］

数列と漸化式の問題です。まず，数列$\{a_n\}$は偶数番目だけをとると単調減少，奇数番目だけをとると単調増加することを示し，さらにこの点を(2)の結論とつなぐ論理が問われています。どちらかというと，理系風の出題内容です。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$2 < a \leqq 4$，$b \geqq 2$として，中心$\mathrm{A}(a,\ 2)$で半径 2 の円C_1と，中心$\mathrm{B}(1,\ b)$で半径 1 の円C_2が外接することより，$\mathrm{AB} = 2+1$となり，$\sqrt{(a-1)^2+(2-b)^2} = 3$から，

$$(a-1)^2+(2-b)^2 = 9 \cdots\cdots\cdots①$$

また，共通接線lと直線ABは直交し，lの傾きが 2 から AB の傾きは$-\frac{1}{2}$となり，$\frac{2-b}{a-1} = -\frac{1}{2}$から，

$$a-1 = 2(b-2) \cdots\cdots\cdots②$$

①②から，$4(b-2)^2+(b-2)^2 = 9$となり，$(b-2)^2 = \frac{9}{5}$から$b-2 = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

すると，$b \geqq 2$なので，$b = 2+\frac{3}{\sqrt{5}}$

また，②から$a = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}+1 = 1+\frac{6}{\sqrt{5}}$となり，この値は$2 < a \leqq 4$を満たしている。

(2)　C_1とC_2の接点Pは，線分ABを$2:1$に内分する点なので，その座標は，

$$\left(\frac{a+2}{3},\ \frac{2+2b}{3}\right) = \left(1+\frac{2}{\sqrt{5}},\ 2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

これより，共通接線lの方程式は，$y-\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2\left(x-1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$となり，

$$y = 2x-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(3)　△OABの面積をSとすると，

$$S = \frac{1}{2}\left|ab-2\cdot 1\right| = \frac{1}{2}\left|\left(1+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\left(2+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-2\right| = \frac{1}{2}\left|3\sqrt{5}+\frac{18}{5}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{9}{5}$$

［解　説］

円と直線についての基本題です。計算はやや面倒ですが。