1

解答解説のページへ

座標平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を C_t，C_t で囲まれた領域を D_t とする。$0 \leqq t \leqq 2$ に対し，D_0 と D_t の共通部分の面積を $S(t)$ とする。$0<t<2$ に対し，C_0 と C_t の交点のうち y 座標が正の方を P_t とする。座標平面の原点を O として，半直線 OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$0<t<2$ のとき，$S(t)$ の値を θ を用いて表せ。

(2)　$0<t<2$ のとき，t を θ を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

0 でない複素数 z に対して，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とおく。i を虚数単位とし，z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。また，w の実部を u，w の虚部を v とする。次の問いに答えよ。

(1) u, v をそれぞれ r と θ を用いて表せ。

(2) 点 z が条件 $|z+1| = |z-i|$ $(0 < \theta < \pi)$ を満たして複素数平面上を動くとき，u と v が満たす関係式を求め，点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。また，$\displaystyle\lim_{r\to\infty} u$ と $\displaystyle\lim_{r\to 0} v$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

k は実数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{B}(4k,\ -2k+2,\ -k+1)$，$\mathrm{C}(4k+4,\ -2k,\ -k)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　$0<s<1$，$0<t<1$ とし，辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $k,\ s,\ t$ を用いて表せ。

(3)　(2)の内分点 P と Q で，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものが存在するとき，P と Q の座標を求めよ。また，そのような P と Q が存在するための k の条件を求めよ。

(4)　k は(3)で求めた範囲にあるとする。(3)の P，Q と線分 PQ 上の点 X に対し △XOA と △XBC の面積が一致するとき，その面積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

自然数 $n,\ s\ (s<n)$ に対して $I_n(s)=\int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s\,dx$ とおく。次の問いに答えよ。

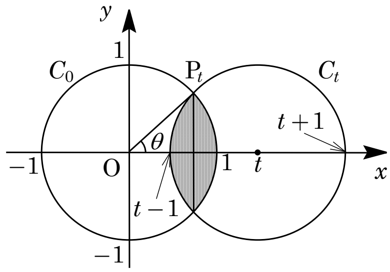
(1) $s<n-1$ のとき，等式 $I_n(s)=\dfrac{n-s}{s+1}I_n(s+1)$ が成り立つことを示せ。

(2) $I_n(s)$ を n と s を用いて表せ。

(3) 自然数 $n,\ s\ (s<n)$ に対して，等式 $\dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_s}=\displaystyle\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\dfrac{n+1}{n-s+k+1}\,{}_s\mathrm{C}_k$ が成り立つことを示せ。ただし，${}_s\mathrm{C}_0={}_s\mathrm{C}_s=1$ とする。

1

問題のページへ



(1)　$C_0 : x^2+y^2=1$，$C_t : (x-t)^2+y^2=1$ で囲まれた領域をそれぞれ D_0，D_t とし，D_0 と D_t の共通部分の面積を $S(t)$ とする。また，$0<t<2$ のとき，C_0 と C_t の交点の y 座標が正の方を P_t とし，OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると，x 軸に関する対称性より，

$$S(t)=2\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2\theta\right)=2\theta-\sin2\theta$$

(2)　P_t から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点は，対称性より，2 点 $(t-1,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分の中点なので，

$$\cos\theta=\frac{(t-1)+1}{2},\ \ t=2\cos\theta$$

(3)　(2)より，$dt=(-2\sin\theta)d\theta$ で，$t=0\to2$ のとき $\theta=\frac{\pi}{2}\to0$ から，

$$\int_0^2 S(t)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(2\theta-\sin2\theta)(-2\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin\theta-2\sin2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=-\Big[4\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\,d\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{3}\Big[\sin^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

［解　説］

2 つの円の交わりを題材にした非常に丁寧な誘導のついた定積分の計算問題です。

2

問題のページへ

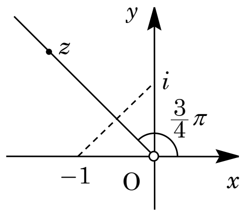
(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (z\neq 0)$，$w=u+vi$ に対して，$w=z+\dfrac{1}{z}$ より，

$$u+vi=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

これより，$u=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$ ……①，$v=\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ ……②である。

(2)　点 z が $|z+1|=|z-i|$ を満たして動くとき，点 z は点 -1 と点 i を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。さらに，$0<\theta<\pi$ より，点 z の軌跡は右図の半直線となる。



すなわち，$r>0$ かつ $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ となり，①②から，

$$u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

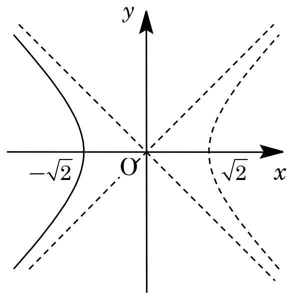
$$v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r-\frac{1}{r}\right)\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$u+v=-\dfrac{2}{\sqrt{2}r}=-\dfrac{\sqrt{2}}{r}$，$u-v=-\dfrac{2}{\sqrt{2}}r=-\sqrt{2}r$ となり，

$$(u+v)(u-v)=-\frac{\sqrt{2}}{r}\cdot(-\sqrt{2}r),\ u^2-v^2=2,\ \frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}=1\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$r>0$ から，$u+v<0$ かつ $u-v<0$ より，$u<v<-u$ ………⑥

⑤⑥より，点 w が描く図形を表す式は，$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ $(x<y<-x)$ である。図示すると，右図の実線部のようになり，双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ の左側の枝である。



また，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}u=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{r\to\infty}\left(r+\frac{1}{r}\right)=-\infty$

$$\lim_{r\to 0}v=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{r\to 0}\left(r-\frac{1}{r}\right)=-\infty$$

［解 説］

複素数平面上の変換についての有名問題です。式変形のポイントは，③と④の和と差をとる点です。

3　　問題のページへ

(1)　原点 O，点 $A(1,\ 1,\ -1)$，$B(4k,\ -2k+2,\ -k+1)$，$C(4k+4,\ -2k,\ -k)$に対し，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{BC}=(4,\ -2,\ -1)$である。

ここで，単位ベクトル$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$a^2+b^2+c^2=1$ ………①

さらに，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$より，

$a+b-c=0$ ………②，$4a-2b-c=0$ ………③

②③より，$3a-3b=0$から$b=a$となり，$c=a+a=2a$

①に代入し，$a^2+a^2+4a^2=1$から$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$となるので，$\vec{n}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ 2)$

(2)　$OP:PA=s:(1-s)$より，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}=(s,\ s,\ -s)$

$BQ:QC=t:(1-t)$より，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=(4k+4t,\ -2k-2t+2,\ -k-t+1)$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(4k+4t-s,\ -2k-2t-s+2,\ -k-t+s+1)$

(3)　$\overrightarrow{PQ}$が$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{BC}$の両方に垂直であるものが存在するとき，lを実数として$\overrightarrow{PQ}=l\vec{n}$と表せるので，$l'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}l$とおくと，

$4k+4t-s=l'$ ……④，$-2k-2t-s+2=l'$ ……⑤，$-k-t+s+1=2l'$ ……⑥

④⑤より，$6k+6t-2=0$となり，$k+t=\dfrac{1}{3}$ ………⑦

このとき，$0<t<1$を満たすtが存在するのは，$0<\dfrac{1}{3}-k<1$から$-\dfrac{2}{3}<k<\dfrac{1}{3}$

また⑤⑥より$-3k-3t-3s+3=0$となり，⑦から$-1-3s+3=0$，すなわち$s=\dfrac{2}{3}$となり，この値は$0<s<1$を満たしている。

以上より，$P\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，$Q\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$である。

(4)　(1)から，$OA=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$

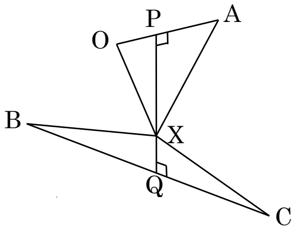
ここで，線分 PQ 上の点 X に対し，$\triangle XOA=\triangle XBC$から，

$\sqrt{3}PX=\sqrt{21}QX$，$PX=\sqrt{7}QX$

これより，$PX:QX=\sqrt{7}:1$となり，

$$PX=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}PQ=\frac{7-\sqrt{7}}{6}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{7-\sqrt{7}}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}(7-\sqrt{7})}{9}$$



このとき，$\triangle XOA=\triangle XBC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}(7-\sqrt{7})}{9}=\dfrac{7\sqrt{2}-\sqrt{14}}{6}$となる。

［解　説］

空間ベクトルの基本題です。誘導に沿えば，計算ミスに注意するだけです。

4

問題のページへ

(1)　$s<n-1$ のとき，$I_n(s)=\int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s dx$ に対して，

$$I_n(s)=\left[-\frac{1}{s+1}x^{n-s}(1-x)^{s+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{n-s}{s+1}x^{n-s-1}(1-x)^{s+1}dx$$

$$=\frac{n-s}{s+1}\int_0^1 x^{n-(s+1)}(1-x)^{s+1}dx=\frac{n-s}{s+1}I_n(s+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①より，$I_n(s+1)=\frac{s+1}{n-s}I_n(s)$ となり，$s\geqq 2$ において，

$$I_n(s)=I_n(1)\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{s}{n-(s-1)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$I_n(1)=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx=\int_0^1(x^{n-1}-x^n)dx=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

となり，②に代入すると，

$$I_n(s)=\frac{1}{(n+1)n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{s}{n-(s-1)}=\frac{s!}{\frac{(n+1)!}{(n-s)!}}=\frac{s!\,(n-s)!}{(n+1)!}$$

$s=1$ をあてはめると，$I_n(1)=\frac{1!\,(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n(n+1)}$ となり成立している。

(3)　(2)より $I_n(s)=\frac{s!\,(n-s)!}{n!}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_s}\cdot\frac{1}{n+1}$ となり，$\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_s}=(n+1)I_n(s)\ \cdots\cdots③$

ここで，二項定理より，$(1-x)^s=\sum_{k=0}^{s}{}_s\mathrm{C}_k(-x)^k=\sum_{k=0}^{s}{}_s\mathrm{C}_k(-1)^k x^k$ となり，

$$I_n(s)=\int_0^1 x^{n-s}\left(\sum_{k=0}^{s}{}_s\mathrm{C}_k(-1)^k x^k\right)dx=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{s}{}_s\mathrm{C}_k(-1)^k x^{n-s+k}\right)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{s}\left(\int_0^1 {}_s\mathrm{C}_k(-1)^k x^{n-s+k}dx\right)=\sum_{k=0}^{s}\left({}_s\mathrm{C}_k(-1)^k\int_0^1 x^{n-s+k}dx\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{s}\left({}_s\mathrm{C}_k(-1)^k\left[\frac{x^{n-s+k+1}}{n-s+k+1}\right]_0^1\right)=\sum_{k=0}^{s}{}_s\mathrm{C}_k(-1)^k\frac{1}{n-s+k+1}\ \cdots\cdots④$$

③④より，$\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_s}=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{n+1}{n-s+k+1}{}_s\mathrm{C}_k$ となる。

［解　説］

定積分の計算のついての頻出題です。(3)は複雑な式の証明ですが，結論から，二項定理の利用を思いつくでしょう。