1

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ。$\lim_{n \to \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

平面上の 3 点 O, A, B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1 \text{ かつ } (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1)　$(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ。

(2)　平面上の点 P が，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|\leqq\frac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\leqq\frac{1}{3}$ をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

P を座標平面上の点とし，点 P の座標を$(a,\ b)$とする。$-\pi \leqq t \leqq \pi$の範囲にある実数 t のうち，曲線$y=\cos x$上の点$(t,\ \cos t)$における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を$N(\mathrm{P})$とする。$N(\mathrm{P})=4$かつ$0<a<\pi$をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a, b を $a^2+b^2>1$ かつ $b\neq 0$ をみたす実数の定数とする。座標空間の点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ b)$ と点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ をとる。点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする。

(1)　$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ。

5

解答解説のページへ

1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする。b_n を $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_1^{\,n-k} a_k$ により定義し，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$F(x)=\dfrac{1}{x+1}-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$ とおくと，

$$F(x)=\frac{1}{x+1}-1-\frac{(-x)\{1-(-x)^{n-1}\}}{1-(-x)}=\frac{-x}{x+1}-\frac{-x-(-x)^n}{1+x}=\frac{(-x)^n}{x+1}$$

すると，$(-1)^nF(x)=(-1)^n\dfrac{(-x)^n}{x+1}=\dfrac{x^n}{x+1}$ となり，

$$\frac{x^n}{x+1}-\frac{1}{2}x^n=\frac{x^n\{2-(x+1)\}}{2(x+1)}=\frac{x^n(1-x)}{2(x+1)}\geqq 0$$

$$\frac{x^n}{x+1}-x^n+\frac{1}{2}x^{n+1}=\frac{x^n\{2-2(x+1)+x(x+1)\}}{2(x+1)}=\frac{x^{n+1}(x-1)}{2(x+1)}\leqq 0$$

よって，$\dfrac{1}{2}x^n \leqq (-1)^nF(x) \leqq x^n-\dfrac{1}{2}x^{n+1}$……①より，

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　①の各辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leqq (-1)^n\int_0^1 F(x)dx \leqq \int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{2(n+1)}$，$\displaystyle\int_0^1\left(x^n-\dfrac{1}{2}x^{n+1}\right)dx=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2(n+2)}$ となり，

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx$$

$$=\Big[\log|x+1|-x\Big]_0^1-\int_0^1\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}dx=\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\int_0^1(-x)^{k-1}dx$$

$$=\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big[x^k\Big]_0^1=\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ここで，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ なので，

$$\int_0^1 F(x)dx=\log 2-a_n$$

②から，$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n(\log 2-a_n)\leqq\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2(n+2)}$ となり，

$$-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{2(n+2)}\leqq(-1)^n n(a_n-\log 2)\leqq-\frac{n}{2(n+1)}$$

$n\to\infty$ のとき，$-\dfrac{n}{2(n+1)}\to-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n}{2(n+2)}\to-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)=-\frac{1}{2}$$

［解 説］

不等式と極限計算という，阪大で頻出タイプの問題です。ポイントは②式ですが，(2)の $\log 2$ に着目すれば方針は立つでしょう。

2

問題のページへ

(1) 平面上の 3 点 O, A, B に対して，$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

すると，$\left|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=1$ より，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=1$ ………①

また，$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{OC}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}$ となり，

$$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=1,\ \left|\overrightarrow{OC}\right|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=1 \text{ ………②}$$

①②より，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ となり，$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})=0$

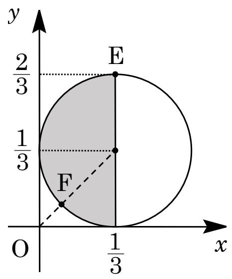
(2) $\left|\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right|\leqq\frac{1}{3}$ より，$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right|\leqq\frac{1}{3}$ ………③

また，$\overrightarrow{OP}\cdot(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\leqq\frac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\leqq\frac{1}{3}$ ………④

ここで，$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ として，(1)から $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OD}$ は直交する単位ベクトルなので，一般性を失うことなく，$\overrightarrow{OC}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{OD}=(0,\ 1)$ とおける。

すると，$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ なので，③から $\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}\leqq\frac{1}{3}$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^2$$



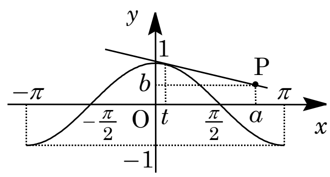
また，④から $x\leqq\frac{1}{3}$ なので，点 P の存在領域は右図の網点部(境界は含む)となる。このとき，点 E，点 F を右図のように決めると，$\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の最大値は $OE=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の最小値は $OF=\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ である。

［解 説］

平面ベクトルの標準的な問題です。(1)の置換えがポイントですが，これは問題文が発する濃厚な匂いによって，気がつくのではないでしょうか。

3

問題のページへ



$-\pi \leqq t \leqq \pi$ のとき，曲線 $y=\cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線の方程式は，$y'=-\sin x$ から，

$$y-\cos t=(-\sin t)(x-t)$$

この接線が点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(0<a<\pi)$ を通るとき，

$$b-\cos t=(-\sin t)(a-t),\ b=(t-a)\sin t+\cos t \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，点 P を通る接線が 4 本という条件は，$(*)$を満たす t が 4 個存在する条件に対応する。ここで，$f(t)=(t-a)\sin t+\cos t$ とおくと，

$$f'(t)=\sin t+(t-a)\cos t-\sin t=(t-a)\cos t$$

$f'(t)=0$ の解は $t=a,\ \pm\frac{\pi}{2}$ であることに注意して，

(i)　$0<a<\frac{\pi}{2}$ のとき

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	↗		↘		↗		↘	-1

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+a,\ f(a)=\cos a,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-a$$

すると，$\frac{\pi}{2}+a>\frac{\pi}{2}-a$，$\cos a>-1$ より，$b=f(t)$ が 4 個の解をもつ条件は，

$$\cos a<b<\frac{\pi}{2}-a$$

(ii)　$a=\frac{\pi}{2}$ のとき

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(t)$	-1	↗		↘		↘	-1

すると，$b=f(t)$ が 4 個の解をもつ場合はない。

(iii)　$\frac{\pi}{2}<a<\pi$ のとき

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	↗		↘		↗		↘	-1

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+a,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-a,\ f(a)=\cos a$$

すると，$\frac{\pi}{2}+a>\cos a$ であり，また $\frac{\pi}{2}-a$ と -1 の大小関係について，

$$g(a)=\frac{\pi}{2}-a-(-1)=\frac{\pi}{2}+1-a$$

これより，$b=f(t)$ が 4 個の解をもつ条件は,

(iii-i)　$\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}+1$ のとき　$g(a)>0$ より $\dfrac{\pi}{2}-a>-1$ なので，$\dfrac{\pi}{2}-a<b<\cos a$

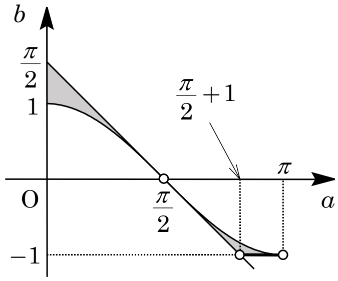
(iii-ii)　$a=\dfrac{\pi}{2}+1$ のとき　$g(a)=0$ より $\dfrac{\pi}{2}-a=-1$ なので，$-1<b<\cos a$

(iii-iii) $\dfrac{\pi}{2}+1<a<\pi$ のとき　$g(a)<0$ より $\dfrac{\pi}{2}-a<-1$ なので，$-1\leqq b<\cos a$

(i)～(iii)より，P$(a,\ b)$ の存在範囲を図示する。

ここで，境界線 $b=\dfrac{\pi}{2}-a$ は境界線 $b=\cos a$ の点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における接線であることから，右図の網点部が求める範囲である。

ただし，境界は $b=-1\left(\dfrac{\pi}{2}+1<a<\pi\right)$ のみ含む。

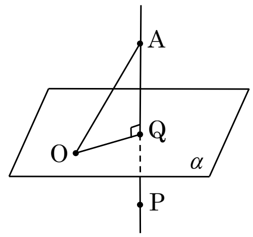


［解　説］

接線の本数を題材にした頻出題です。ただ，結論に至る過程は，特に(iii)の場合分けでは，グラフをイメージするものの，平坦なものではありませんでした。なお，$N(\mathrm{P})=4$ の場合だけですので，複接線については触れていません。

4

問題のページへ



(1)　$\mathrm{A}(a,\ 0,\ b)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$に対し，点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を通り直線APと垂直な平面αと直線APとの交点をQとする。

tを実数として$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$から，

$$(t\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0,\quad t\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

$b\neq 0$から$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\neq 0$なので，$t=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdots\cdots\cdots①$$

①より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|$から，

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1$のとき，②から$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}})^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2(\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2-1)\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-a,\ y,\ -b)$，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(-a,\ 0,\ -b)$なので，③から，

$$\{-a(x-a)+b^2\}^2=\{(x-a)^2+y^2+b^2\}(a^2+b^2-1)$$
$$a^2(x-a)^2-2ab^2(x-a)+b^4=(a^2+b^2-1)\{(x-a)^2+y^2+b^2\}$$
$$(b^2-1)(x-a)^2+2ab^2(x-a)+(a^2+b^2-1)y^2+a^2b^2-b^2=0$$
$$(b^2-1)x^2+(a^2+b^2-1)y^2+2ax-a^2-b^2=0\cdots\cdots\cdots④$$

すると，$a^2+b^2>1$より，点Pの軌跡は2次曲線④である。

［解　説］

空間ベクトルについての問題です。(1)は正射影ベクトルを表す①を導くという方法で処理をしています。なお，(2)は計算だけですが，かなり面倒です。

5

問題のページへ

(1)　さいころを n 回投げて k 回目に出た目を a_k，そして $b_n=\sum_{k=1}^{n}a_1^{\,n-k}a_k$ とすると，

$$b_1=\sum_{k=1}^{1}a_1^{\,1-k}a_k=a_1^{\,0}a_1=a_1,\quad b_2=\sum_{k=1}^{2}a_1^{\,2-k}a_k=a_1^{\,1}a_1+a_1^{\,0}a_2=a_1^{\,2}+a_2$$

ここで，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とすると，$1\leqq a_1\leqq 6$ から $p_1=0$ である。

また，a_1 と $a_1^{\,2}$ の関係を mod 7 で記すと，右表のようになり，b_2 が 7 の倍数になるのは，

a_1	1	2	3	4	5	6
$a_1^{\,2}$	1	4	2	2	4	1

$$(a_1^{\,2},\ a_2)\equiv(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (4,\ 3)$$

これより，$(a_1,\ a_2)=(1,\ 6),\ (6,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5),\ (2,\ 3),\ (5,\ 3)$ から，

$$p_2=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

(2)　$b_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_1^{\,n+1-k}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_1^{\,n+1-k}a_k+a_1^{\,0}a_{n+1}=a_1\sum_{k=1}^{n}a_1^{\,n-k}a_k+a_{n+1}=a_1b_n+a_{n+1}$

以下，mod 7 で記すと，$b_n\equiv 0$ のとき，$b_{n+1}\equiv a_{n+1}$ から $b_{n+1}\equiv 0$ ではない。

$b_n\equiv 0$ でないとき，$b_n\equiv 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ となり，$(a_1,\ b_n)$ と a_1b_n の関係を mod 7 で記すと，右表のようになる。すると，どんな a_1b_n に対しても，$a_1b_n+a_{n+1}\equiv 0$ となる a_{n+1} がただ 1 つ存在する。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

すると，b_n が 7 の倍数となる確率 p_n について，

$$p_{n+1}=0\cdot p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)=-\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$$

$p_{n+1}-\frac{1}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{7}\right)$ と変形すると，

$$p_n-\frac{1}{7}=\left(p_1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(0-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ である。

［解 説］

確率と漸化式の問題です。(1)の設問が，(2)の方針につながるように誘導がなされています。