$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

　$a,\ b$ を実数とする。θ についての方程式 $\cos 2\theta = a\sin\theta + b$ が実数解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

正の実数 a, x に対して，$y=(\log_{\frac{1}{2}} x)^3+a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ とする。

(1)　$t=\log_2 x$ とするとき，y を a, t を用いて表せ。

(2)　x が $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ の範囲を動くとき，y の最大値 M を a を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

平面上の 3 点 O, A, B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1 \text{ かつ } (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1)　$(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ。

(2)　平面上の点 P が，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|\leqq\dfrac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\leqq\dfrac{1}{3}$ をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

1　　問題のページへ

$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$ ……①に対して，$1-2\sin^2\theta = a\sin\theta + b$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ のもとで $1-2t^2 = at+b$ となり，

$$2t^2+at+b-1=0 \text{ ………②}$$

θ についての方程式①が実数解をもつ条件は，t についての方程式②が $-1 \leqq t \leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件に対応し，②の左辺を $f(t)$ とおくと，

$$f(t)=2t^2+at+b-1=2\left(t+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+b-1$$

(i)　$-\dfrac{a}{4}<-1\ (a>4)$ のとき

求める条件は，$f(-1)=-a+b+1 \leqq 0$ かつ $f(1)=a+b+1 \geqq 0$ より，

$$-a-1 \leqq b \leqq a-1$$

(ii)　$-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1\ (-4 \leqq a \leqq 4)$ のとき

求める条件は，$-\dfrac{a^2}{8}+b-1 \leqq 0$ かつ $\left(f(-1) \geqq 0 \text{ または } f(1) \geqq 0\right)$ より，

$$b \leqq \frac{a^2}{8}+1 \text{ かつ } \left(b \geqq a-1 \text{ または } b \geqq -a-1\right)$$

(iii)　$-\dfrac{a}{4}>1\ (a<-4)$ のとき

求める条件は，$f(-1)=-a+b+1 \geqq 0$ かつ $f(1)=a+b+1 \leqq 0$ より，

$$a-1 \leqq b \leqq -a-1$$

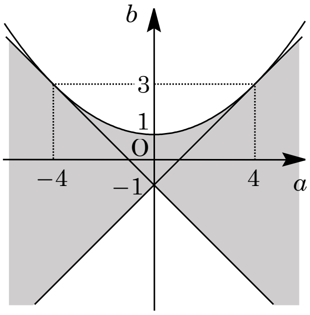
(i)〜(iii)より，境界線 $b=\dfrac{a^2}{8}+1$ と $b=a-1$ の関係は，$\dfrac{a^2}{8}+1=a-1$ として，

$$a^2-8a+16=0,\ (a-4)^2=0$$

よって，点 $(4,\ 3)$ で接する。

また，境界線 $b=\dfrac{a^2}{8}+1$ と $b=-a-1$ の関係も同様にすると，$(a+4)^2=0$ から点 $(-4,\ 3)$ で接する。

以上より，求める点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

2 次方程式の解の配置についての基本題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$x>0$ のとき，$t=\log_2 x$ とおくと，$\log_{\frac{1}{2}} x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=\dfrac{\log_2 x}{-\log_2 2}=-t$

$$\log_{\sqrt{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}}=\frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 2}=2t\text{，}\ \log_4 x^3=\frac{\log_2 x^3}{\log_2 4}=\frac{3\log_2 x}{2\log_2 2}=\frac{3}{2}t$$

すると，$y=(\log_{\frac{1}{2}} x)^3+a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ に対して，

$$y=(-t)^3+a\cdot 2t\cdot\frac{3}{2}t=-t^3+3at^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8$ のとき，$\log_2\dfrac{1}{2}\leqq\log_2 x\leqq\log_2 8$ から $-1\leqq t\leqq 3$ となり，$(*)$より，

$$y'=-3t^2+6at=-3t(t-2a)$$

$a>0$ より，$t\geqq -1$ における y の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$1+3a$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$

このとき，$-1\leqq t\leqq 3$ における y の最大値を M とすると，

(i)　$0<2a<3\ \left(0<a<\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$4a^3-(1+3a)=(a-1)(4a^2+4a+1)=(a-1)(2a+1)^2$ より，

(i-i)　$0<a<1$ のとき　$4a^3<1+3a$ より $M=1+3a$

(i-ii)　$1\leqq a<\dfrac{3}{2}$ のとき　$4a^3\geqq 1+3a$ より $M=4a^3$

(ii)　$2a\geqq 3\ \left(a\geqq\dfrac{3}{2}\right)$ のとき　$t=3$ のとき $y=-27+27a$ となり，

$$-27+27a-(1+3a)=-28+24a=4(6a-7)>0$$

これより，$M=-27+27a$ である。

［解　説］

対数が題材の微分と増減の問題です。丁寧な場合分けがすべてです。

3

問題のページへ

(1)　平面上の 3 点 O, A, B に対して，$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

すると，$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=1$ より，$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=1$ ………①

また，$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{OC}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}$ となり，

$$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=1,\ |\overrightarrow{OC}|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=1 \text{ ………②}$$

①②より，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ となり，$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})=0$

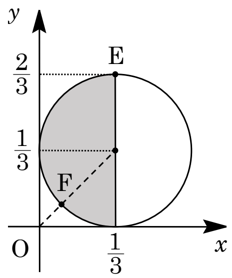
(2)　$|\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})|\leqq\frac{1}{3}$ より，$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right|\leqq\frac{1}{3}$ ………③

また，$\overrightarrow{OP}\cdot(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\leqq\frac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\leqq\frac{1}{3}$ ………④

ここで，$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ として，(1)から $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OD}$ は直交する単位ベクトルなので，一般性を失うことなく，$\overrightarrow{OC}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{OD}=(0,\ 1)$ とおける。

すると，$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ なので，③から $\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}\leqq\frac{1}{3}$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^2$$



また，④から $x\leqq\frac{1}{3}$ なので，点 P の存在領域は右図の網点部(境界は含む)となる。このとき，点 E, 点 F を右図のように決めると，$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値は $\mathrm{OE}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$|\overrightarrow{OP}|$ の最小値は $\mathrm{OF}=\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ である。

［解 説］

平面ベクトルの標準的な問題です。(1)の置換えがポイントですが，これは問題文が発する濃厚な匂いによって，気がつくのではないでしょうか。