1

解答解説のページへ

三角形 ABC において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を M，辺 AC を $1:2$ に内分する点を N とする。また，線分 BN と線分 CM の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とするとき，線分 AP の長さを，a, b, c を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とし，1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数を L_n，最大公約数を G_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$L_2 = 5$ となる確率および $G_2 = 5$ となる確率を求めよ。

(2)　L_n が素数でない確率を求めよ。

(3)　G_n が素数でない確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

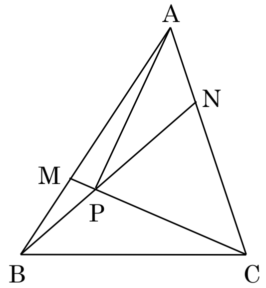
以下の問いに答えよ。

(1)　実数α，βに対し，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$が成り立つことを示せ。

(2)　a，b を$b>a^2$を満たす定数とし，座標平面上に点$\mathrm{A}(a,\ b)$をとる。さらに，点 A を通り，傾きが k の直線を l とし，直線 l と放物線$y=x^2$で囲まれた部分の面積を$S(k)$とする。kが実数全体を動くとき，$S(k)$の最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AM}:\mathrm{MB}=2:1$，$\mathrm{AN}:\mathrm{NC}=1:2$ のとき，$\triangle\mathrm{ABN}$ と直線 CM について，メネラウスの定理を適用すると，$\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}\cdot\dfrac{\mathrm{NC}}{\mathrm{CA}}=1$ となり，

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}\cdot\frac{2}{3}=1,\quad \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PN}}=\frac{3}{4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=c$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=b$ のとき，余弦定理から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}$$

(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\dfrac{1}{7}|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ ……(＊)となり，

$$|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=16|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+8\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=16c^2+8\cdot\frac{c^2+b^2-a^2}{2}+b^2$$

$$=-4a^2+5b^2+20c^2$$

よって，(＊)から，$\mathrm{AP}=\dfrac{1}{7}\sqrt{-4a^2+5b^2+20c^2}$

［解　説］

平面ベクトルと図形についての基本題です。(1)はベクトルを用いて処理しても構いませんが……。

2

問題のページへ

(1)　さいころを n 回投げて出る目の数を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とし，このとき出る目の数の最小公倍数を L_n，最大公約数を G_n とする。

ここで，$n=2$ のとき，X_1，X_2 と L_2 の関係を表にまとめると右のようになり，$L_2=5$ となるのは，

$$(X_1,\ X_2)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$$

よって，その確率は $\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$ である。

X_1 \ X_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	6	4	10	6
3	3	6	3	12	15	6
4	4	4	12	4	20	12
5	5	10	15	20	5	30
6	6	6	6	12	30	6

また X_1，X_2 と G_2 の関係を表にまとめると右のようになり，$G_2=5$ となるのは，

$$(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$$

よって，その確率は $\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$ である。

X_1 \ X_2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

(2)　1，2，3，4，5，6 の最小公倍数は，$2^2\cdot 3\cdot 5=60$ である。これより，L_n が素数となるのは，$L_n=2,\ 3,\ 5$ に限られる。

(i)　$L_n=2$ のとき

X_1，X_2，$\cdots$，X_n が 1 または 2 のいずれかで，しかも 1 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

(ii)　$L_n=3$ のとき

X_1，X_2，$\cdots$，X_n が 1 または 3 のいずれかで，しかも 1 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

(iii)　$L_n=5$ のとき

X_1，X_2，$\cdots$，X_n が 1 または 5 のいずれかで，しかも 1 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

(i)〜(iii)より，L_n が素数でない確率は，

$$1-3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

(3)　G_n は 6 以下の自然数なので，G_n が素数となるのは，$G_n=2,\ 3,\ 5$ に限られる。

(i)　$G_n=2$ のとき

X_1, X_2, $\cdots$, X_n が 2 または 4 または 6 のいずれかで，しかも 4 だけ, 6 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(ii)　$G_n=3$ のとき

X_1, X_2, $\cdots$, X_n が 3 または 6 のいずれかで，しかも 6 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iii)　$G_n=5$ のとき

X_1, X_2, $\cdots$, X_n が 5 だけの場合より，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(i)～(iii)より，G_n が素数でない確率は,

$$1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解　説］

確率と整数の融合問題です。(1)の解答例はやり過ぎ感がありますが，このように具体的に調べると，(2)と(3)にスムーズにつながります。

3

問題のページへ

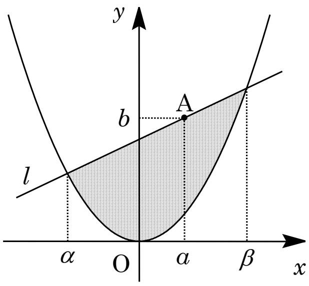
(1)　$I=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$ とおくと，

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha-\beta}{2}(x-\alpha)^2\Big]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$$

(2)　$b>a^2$ のとき，点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り，傾きが k の直線 l の方程式は，$y-b=k(x-a)$ より，

$$y=kx-ak+b\cdots\cdots\text{①}$$



ここで，l と放物線 $y=x^2\cdots\cdots$②との共有点は，①②を連立して，

$$x^2-kx+ak-b=0\cdots\cdots\text{③}$$

③の判別式を D とすると，

$$D=k^2-4(ak-b)=(k-2a)^2-4a^2+4b=(k-2a)^2+4(b-a^2)>0$$

このとき，③の解は $x=\dfrac{k\pm\sqrt{D}}{2}$ となり，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，直線 l と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積 $S(k)$ は，(1)より，

$$S(k)=\int_{\alpha}^{\beta}(kx-ak+b-x^2)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{D})^3=\frac{1}{6}\Big\{\sqrt{(k-2a)^2+4(b-a^2)}\Big\}^3$$

すると，$k=2a$ のとき，$S(k)$ は最小値 $\dfrac{1}{6}\Big\{\sqrt{4(b-a^2)}\Big\}^3=\dfrac{4}{3}(b-a^2)^{\frac{3}{2}}$ をとる。

［解　説］

定積分と面積についての超頻出の基本題です。