1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を $ab<1$ を満たす正の実数とする。xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする。ただし，$s<t$ とする。

(1) s および t を a, b で表せ。

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が曲線 $y=\dfrac{9}{4}-3x^2$ 上の $x>0$，$y>0$ を満たす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに，4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1) t を s を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ を満たす実数とする。

(1)　$x \geqq t$ のとき，不等式 $-\dfrac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \dfrac{1}{t}(x-t) \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $-\dfrac{1}{6n^3} \leqq \displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \dfrac{1}{n}\log t - \dfrac{1}{2tn^2} \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ を満たすような実数 p，q の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

整数 $a,\ b,\ c$ に関する次の条件(＊)を考える。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx=\int_b^c (x^2+ax)\,dx \cdots\cdots\cdots (*)$$

(1)　整数 $a,\ b,\ c$ が(＊)および $a\neq b$ を満たすとき，c は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　$c=3600$ のとき，(＊)および $a<b$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

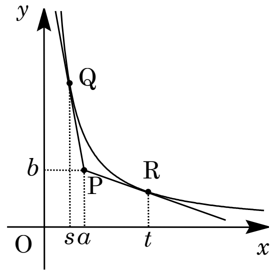
次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。x についての方程式 $x-\tan x=a$ の実数解のうち，$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものがちょうど 1 個あることを示せ。

(2) 自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x を x_n とおく。t を $|t|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。このとき，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が x_1，x_2，x_3，$\cdots$のいずれかと等しいことであることを示せ。

1

問題のページへ



(1)　曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 上の点 $\left(u,\ \dfrac{1}{u}\right)$ における接線の方程式は，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ より，

$$y-\frac{1}{u}=-\frac{1}{u^2}(x-u),\quad y=-\frac{1}{u^2}x+\frac{2}{u}$$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0,\ ab<1)$ を通ることより，

$$b=-\frac{1}{u^2}a+\frac{2}{u},\quad bu^2-2u+a=0\cdots\cdots\cdots①$$

①より，$u=\dfrac{1\pm\sqrt{1-ab}}{b}$ となり，①の解が $u=s,\ t$ $(s<t)$ なので，

$$s=\frac{1-\sqrt{1-ab}}{b},\quad t=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}$$

(2)　$\mathrm{P}(a,\ b)$ が $y=\dfrac{9}{4}-3x^2$ $(x>0,\ y>0)$ 上を動くとき，$b=\dfrac{9}{4}-3a^2\cdots\cdots\cdots②$

また，$a>0$，$\dfrac{9}{4}-3a^2>0$ より，$0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

さて，(1)より，$\dfrac{t}{s}=\dfrac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}=-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{1-ab}}$ に対し，$v=1-ab$ とおくと，

$$\frac{t}{s}=-1+\frac{2}{1-\sqrt{v}}\cdots\cdots\cdots③$$

②から，$v=1-a\left(\dfrac{9}{4}-3a^2\right)=3a^3-\dfrac{9}{4}a+1$ となり，

$$v'=9a^2-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}(2a+1)(2a-1)$$

これより，$0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ における v の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
v'		$-$	0	$+$	
v	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1

ここで，$\dfrac{t}{s}$ が最小となるのは，③から v が最小になるときより，$\dfrac{t}{s}$ の最小値は $-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}=-1+4=3$ である。

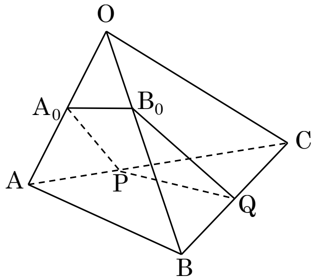
また，このとき $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{9}{4}-3\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$ である。

［解　説］

接線および微分と増減についての基本題です。計算も平易です。

2

問題のページへ



(1)　同一平面上にない 4 点 O, A, B, C に対して，条件より，

$$\overrightarrow{OA_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB_0}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

また，$0<s<1$，$0<t<1$として，

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

さて, 4 点A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあることより，$x,\ y,\ z$ を $x+y+z=1$ ……①を満たす実数として，$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA_0}+y\overrightarrow{OB_0}+z\overrightarrow{OP}$と表すと，

$$(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}x\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{OB}+(1-s)z\overrightarrow{OA}+sz\overrightarrow{OC}$$
$$=\left(\frac{1}{2}x+z-sz\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{OB}+sz\overrightarrow{OC}$$

すると，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$は 1 次独立なので,

$$0=\frac{1}{2}x+z-sz\ \cdots\cdots\text{②},\ 1-t=\frac{1}{3}y\ \cdots\cdots\text{③},\ t=sz\ \cdots\cdots\text{④}$$

①②より，$(1-y-z)+2z-2sz=0$となり，$1-y+z-2sz=0$ ………⑤

③⑤より，$1-(3-3t)+z-2sz=0$ となり，$(2s-1)z=3t-2$ ………⑥

$s\neq\frac{1}{2}$のとき，$z=\frac{3t-2}{2s-1}$となり，④に代入すると，$t=\frac{s(3t-2)}{2s-1}$から,

$$2st-t=3st-2s,\ (s+1)t=2s,\ t=\frac{2s}{s+1}\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

なお，$s=\frac{1}{2}$のとき，⑥から$t=\frac{2}{3}$となり，これは⑦を満たしている。

(2)　$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\angle AOB=120^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$，$\angle COA=60^\circ$より，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1$$

このとき，$\angle POQ=90^\circ$から，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$となり，

$$\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\}=0$$

すると，$-(1-s)(1-t)+(1-s)t+4st=0$から，$2st+2t+s-1=0$

⑦を代入すると，$(2s+2)\cdot\frac{2s}{s+1}+s-1=0$となり，

$$4s+s-1=0,\ 5s=1$$

よって，$0<s<1$から$s=\frac{1}{5}$，このとき$t=\frac{1}{3}$となり$0<t<1$を満たしている。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用についての基本題です。ただ, 計算がやや難です。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$t \geqq 1$ に対して，$x \geqq t$ のとき，$f(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=-\frac{x-t}{tx} \leqq 0$$

これより，$f(x)$ は単調に減少し，$f(x) \leqq f(t)=0$ となり，

$$\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$x \geqq t$ のとき，$g(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)+\dfrac{(x-t)^2}{2}$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}+(x-t)=-\frac{x-t}{tx}+(x-t)=\frac{(x-t)(tx-1)}{tx} \geqq 0$$

これより，$g(x)$ は単調に増加し，$g(x) \geqq g(t)=0$ となり，

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t) \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x \geqq t$ のとき，$-\dfrac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots③$

(2)　まず, n を自然数とし，③の各辺を t から $t+\dfrac{1}{n}$ まで積分すると，

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2}dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \left\{\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\right\}dx \leqq 0$$

ここで，$-\displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2}dx=-\frac{1}{6}\Big[(x-t)^3\Big]_t^{t+\frac{1}{n}}=-\frac{1}{6n^3}$

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} \left\{\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\right\}dx=\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx-\Big[x\log t+\frac{1}{2t}(x-t)^2\Big]_t^{t+\frac{1}{n}}$$
$$=\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2}$$

よって，$-\dfrac{1}{6n^3} \leqq \displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2} \leqq 0 \cdots\cdots\cdots④$

(3)　$a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ を満たすような実数 p, q が存在するには，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}a_n-p\right)=q$ と変形すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}a_n-p\right)=0$ が必要であり，

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^2 \log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^2$$
$$=2\log 2-1 \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$\displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx-\frac{1}{2tn^2} \leqq \frac{1}{n}\log t \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx-\frac{1}{2tn^2}+\frac{1}{6n^3} \cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，$t=1+\dfrac{k}{n}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ とし，k について⑥の各辺の和をとる。

まず，⑤から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\log x\,dx=\int_1^2\log x\,dx=2\log 2-1=p$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)},\ \ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}a_n,\ \ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{6n^3}=\frac{1}{6n^2}$$

すると，⑥から，$\displaystyle p-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\leqq\frac{1}{n}a_n\leqq p-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{6n^2}$ となり，

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\leqq\frac{1}{n}a_n-p\leqq-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{6n^2}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\leqq a_n-pn\leqq-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{6n}\cdots\cdots\cdots⑦$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right\}=-\int_1^2\frac{1}{2x}dx=-\frac{1}{2}\big[\log x\big]_1^2=-\frac{1}{2}\log 2$ より，⑦から，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=-\frac{1}{2}\log 2$$

以上より，$p=2\log 2-1$，$q=-\frac{1}{2}\log 2$ である。

［解 説］

定積分と不等式に区分求積法が絡んだ阪大らしい問題です。(3)は，実数 p, q が存在するのを前提にして，必要条件から述べていく方法をとっています。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　(＊)より，$\displaystyle\int_a^c (x^2+bx)\,dx-\int_b^c (x^2+ax)\,dx=0$ となり，

$$\int_a^b x^2\,dx+b\int_a^c x\,dx-a\int_b^c x\,dx=0$$

これより，$\dfrac{1}{3}(b^3-a^3)+\dfrac{b}{2}(c^2-a^2)-\dfrac{a}{2}(c^2-b^2)=0$ となり，

$$\frac{b-a}{2}c^2=-\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{ab}{2}(a-b)$$

$a\neq b$ から，$c^2=-\dfrac{2}{3}(b^2+ab+a^2)-ab=-\dfrac{1}{3}(2a^2+5ab+2b^2)$ となり，

$$c^2=-\frac{1}{3}(a+2b)(2a+b)\,,\ (a+2b)(2a+b)=-3c^2\cdots\cdots\cdots①$$

①の右辺が 3 の倍数より，$a+2b$，$2a+b$ の少なくとも一方は 3 の倍数である。

そして，$(a+2b)+(2a+b)=3(a+b)\cdots\cdots②$に注意すると，

(i)　$a+2b$ が 3 の倍数のとき　②より $2a+b=3(a+b)-(a+2b)$

よって，$2a+b$ も 3 の倍数になる。

(ii)　$2a+b$ が 3 の倍数のとき　②より $a+2b=3(a+b)-(2a+b)$

よって，$a+2b$ も 3 の倍数になる。

(i)(ii)より，$a+2b$，$2a+b$ はともに 3 の倍数となる。

すると，$(a+2b)(2a+b)$ は 9 の倍数になり，①から c^2 は 3 の倍数，すなわち c は 3 の倍数である。

(2)　(＊)が成り立ち，$c=3600=2^4\times3^2\times5^2$ かつ $a<b$ のとき，①より，

$$(a+2b)(2a+b)=-2^8\times3^5\times5^4\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，整数 a, b, c に対して，$(a+2b)-(2a+b)=-a+b>0$ なので，③より，

$$2a+b<0<a+2b$$

また，3 の倍数の組$(a+2b,\ 2a+b)$を 1 つとると，k, l を整数とし，

$$(a+2b,\ 2a+b)=(3k,\ 3l)\ \Leftrightarrow\ (a,\ b)=(2l-k,\ 2k-l)$$

これより，整数の組$(a,\ b)$はただ 1 つ定まる。

すると，③を満たす 3 の倍数の組$(a+2b,\ 2a+b)$は，

$$(a+2b,\ 2a+b)=(2^p\times3^q\times5^r,\ -2^{8-p}\times3^{5-q}\times5^{4-r})$$

ただし，$p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$，$q=1,\ 2,\ 3,\ 4$，$r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ である。

したがって，③を満たす 3 の倍数の組$(a+2b,\ 2a+b)$の個数は $9\times4\times5=180$ なので，③を満たす整数の組$(a,\ b)$の個数は 180 である。

［解 説］

標準的な整数問題です。(1)のプロセスが，(2)の誘導になっています。

5

問題のページへ

(1)　方程式 $x-\tan x=a$ ……①に対して，$f(x)=x-\tan x$ とおくと，

$$f'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=-\tan^2 x$$

すると，$|x|<\frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，

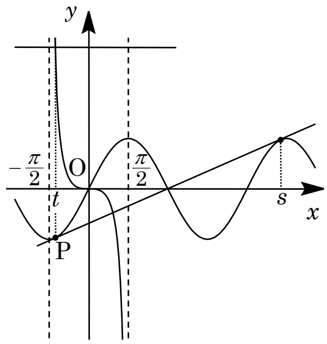
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=-\infty$$

よって，実数 a に対し，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ は，$|x|<\frac{\pi}{2}$ においてただ 1 つの共有点をもつ。すなわち，①の $|x|<\frac{\pi}{2}$ における実数解は 1 個である。

(2)　自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $|x|<\frac{\pi}{2}$ を満たすただ 1 つの実数 x を $x=x_n$ とおくと，

$$x_n-\tan x_n=n\pi\ \left(|x_n|<\frac{\pi}{2}\right)\ \cdots\cdots\cdots ②$$



さて，$|t|<\frac{\pi}{2}$ において，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線の方程式は，$y'=\cos x$ より，

$$y-\sin t=(\cos t)(x-t)$$

$$y=x\cos t-t\cos t+\sin t\ \cdots\cdots\cdots ③$$

接線③が $x\geqq\frac{\pi}{2}$ で曲線 C と接するとき，その接点を $(s,\ \sin s)$ $\left(s\geqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，この点における接線の方程式は，

$$y=x\cos s-s\cos s+\sin s\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③と④が一致することより，

$$\cos t=\cos s\ \cdots\cdots\cdots ⑤,\quad -t\cos t+\sin t=-s\cos s+\sin s\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤より，$s\geqq\frac{\pi}{2}$ なので，n を自然数として $s=2n\pi\pm t$ となり，

(i)　$s=2n\pi+t$ のとき

⑥に代入して，$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi+t)\cos(2n\pi+t)+\sin(2n\pi+t)$ となり，

$$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi+t)\cos t+\sin t,\quad 2n\pi\cos t=0$$

すると，$|t|<\frac{\pi}{2}$ より成立しない。

(ii)　$s=2n\pi-t$ のとき

⑥に代入して，$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi-t)\cos(2n\pi-t)+\sin(2n\pi-t)$ となり，

$$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi-t)\cos t-\sin t,\quad 2(n\pi-t)\cos t+2\sin t=0$$

これより，$n\pi-t+\tan t=0$ となり，$t-\tan t=n\pi\ \cdots\cdots\cdots ⑦$

すると，⑦の解は$|t|<\dfrac{\pi}{2}$にただ 1 つだけ存在し，②から$t=x_n$となる。

(i)(ii)より，t はx_1，x_2，x_3，…のいずれかと等しい。

逆に，ある自然数 n に対して$t=x_n\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき，点$\mathrm{P}(t,\ \sin t)$における曲線 C の接線は，$s=2n\pi-x_n\left(s\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$である点$(s,\ \sin s)$において接する。

［解 説］

微分法の応用問題です。(2)は，(1)との繋がりがわかりにくいのですが，数式処理をしていくと，$t=x_n$であることと曲線 C に複接線が存在することとの関係が見えてきます。