1 解答解説のページへ

aを実数とする。Cを放物線$y=x^2$とする。

(1)　点$\mathrm{A}(a,\ -1)$を通るようなCの接線は，ちょうど2本存在することを示せ。

(2)　点$\mathrm{A}(a,\ -1)$からCに2本の接線を引き，その接点をP，Qとする。直線PQの方程式は$y=2ax+1$であることを示せ。

(3)　点$\mathrm{A}(a,\ -1)$と直線$y=2ax+1$の距離をLとする。aが実数全体を動くとき，Lの最小値とそのときのaの値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに，4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1)　t を s を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

整数 $a,\ b,\ c$ に関する次の条件$(*)$を考える。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx=\int_b^c (x^2+ax)\,dx\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

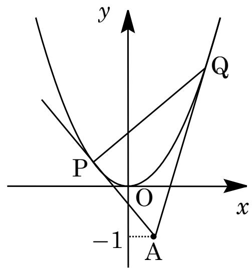
(1)　整数 $a,\ b,\ c$ が$(*)$および$a\neq b$を満たすとき，c^2 を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$c=3$ のとき，$(*)$および$a<b$ を満たす整数の組$(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3)　整数 $a,\ b,\ c$ が$(*)$および$a\neq b$を満たすとき，c は 3 の倍数であることを示せ。

1

問題のページへ



(1)　放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y' = 2x$ から，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2$$

点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ を通ることから，$-1 = 2at - t^2$ となり，

$$t^2 - 2at - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$D/4 = a^2 + 1 > 0$ となり，①は異なる 2 実数解をもつ。すなわち，A を通る接線は 2 本存在する。

(2)　C 上の接点を $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，①の 2 実数解が $t = p,\ q$ より，

$$p + q = 2a,\quad pq = -1 \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，直線 PQ の方程式は，$y - p^2 = \dfrac{p^2 - q^2}{p - q}(x - p)$ となり，

$$y = (p + q)(x - p) + p^2,\quad y = (p + q)x - pq$$

すると，②から，直線 PQ の方程式は $y = 2ax + 1$ となる。

(3)　直線 $y = 2ax + 1$ すなわち $2ax - y + 1 = 0$ と点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ の距離 L は，

$$L = \frac{|2a^2 + 1 + 1|}{\sqrt{4a^2 + 1}} = \frac{2a^2 + 2}{\sqrt{4a^2 + 1}} = \sqrt{\frac{(2a^2 + 2)^2}{4a^2 + 1}} = \sqrt{\frac{4a^4 + 8a^2 + 4}{4a^2 + 1}}$$

ここで，$f(a) = \dfrac{4a^4 + 8a^2 + 4}{4a^2 + 1}$ とおくと，相加平均と相乗平均の関係より，

$$f(a) = a^2 + \frac{7}{4} + \frac{9}{4(4a^2 + 1)} = \frac{4a^2 + 1}{4} + \frac{9}{4(4a^2 + 1)} + \frac{3}{2}$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{4a^2 + 1}{4} \cdot \frac{9}{4(4a^2 + 1)}} + \frac{3}{2} = 2\sqrt{\frac{9}{16}} + \frac{3}{2} = 3$$

等号成立は，$\dfrac{4a^2 + 1}{4} = \dfrac{9}{4(4a^2 + 1)}$ のとき，すなわち $(4a^2 + 1)^2 = 9$ から，

$$4a^2 + 1 = 3,\quad a^2 = \frac{1}{2},\quad a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

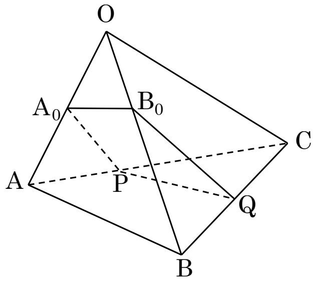
したがって，$L = \sqrt{f(a)}$ なので，$a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき L は最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

［解　説］

放物線と接線についての頻出題です。どの設問も，いろいろな方法が考えられます。

2

問題のページへ



(1) 同一平面上にない 4 点 O, A, B, C に対して，条件より，

$$\overrightarrow{OA_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OB_0}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

また，$0<s<1$，$0<t<1$ として，

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\,,\ \overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

さて, 4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあることより，x，y，z を $x+y+z=1$ ……①を満たす実数として，$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA_0}+y\overrightarrow{OB_0}+z\overrightarrow{OP}$ と表すと，

$$(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}x\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{OB}+(1-s)z\overrightarrow{OA}+sz\overrightarrow{OC}$$
$$=\left(\frac{1}{2}x+z-sz\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{OB}+sz\overrightarrow{OC}$$

すると，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は 1 次独立なので，

$$0=\frac{1}{2}x+z-sz\ \cdots\cdots②,\ 1-t=\frac{1}{3}y\ \cdots\cdots③,\ t=sz\ \cdots\cdots④$$

①②より，$(1-y-z)+2z-2sz=0$ となり，$1-y+z-2sz=0$ ………⑤

③⑤より，$1-(3-3t)+z-2sz=0$ となり，$(2s-1)z=3t-2$ ………⑥

$s\neq\frac{1}{2}$ のとき，$z=\frac{3t-2}{2s-1}$ となり，④に代入すると，$t=\frac{s(3t-2)}{2s-1}$ から，

$$2st-t=3st-2s,\ (s+1)t=2s,\ t=\frac{2s}{s+1}\ \cdots\cdots⑦$$

なお，$s=\frac{1}{2}$ のとき，⑥から $t=\frac{2}{3}$ となり，これは⑦を満たしている。

(2) $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\angle AOB=120°$，$\angle BOC=90°$，$\angle COA=60°$ より，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\,,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0\,,\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1$$

このとき，$\angle POQ=90°$ から，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ となり，

$$\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\}=0$$

すると，$-(1-s)(1-t)+(1-s)t+4st=0$ から，$2st+2t+s-1=0$

⑦を代入すると，$(2s+2)\cdot\frac{2s}{s+1}+s-1=0$ となり，

$$4s+s-1=0,\ 5s=1$$

よって，$0<s<1$ から $s=\frac{1}{5}$，このとき $t=\frac{1}{3}$ となり $0<t<1$ を満たしている。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用についての基本題です。ただ，計算がやや難です。

3

問題のページへ

(1) (＊)より，$\displaystyle\int_a^c (x^2+bx)\,dx-\int_b^c (x^2+ax)\,dx=0$ となり，

$$\int_a^b x^2\,dx+b\int_a^c x\,dx-a\int_b^c x\,dx=0$$

これより，$\dfrac{1}{3}(b^3-a^3)+\dfrac{b}{2}(c^2-a^2)-\dfrac{a}{2}(c^2-b^2)=0$ となり，

$$\frac{b-a}{2}c^2=-\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{ab}{2}(a-b)$$

$a\neq b$ から，

$$c^2=-\frac{2}{3}(b^2+ab+a^2)-ab=-\frac{1}{3}(2a^2+5ab+2b^2)=-\frac{1}{3}(a+2b)(2a+b)$$

(2) (＊)が成り立ち，$c=3$ かつ $a<b$ のとき，(1)の結果を利用して，

$$9=-\frac{1}{3}(a+2b)(2a+b),\ (a+2b)(2a+b)=-27$$

ここで，整数 a, b, c に対して，$(a+2b)-(2a+b)=-a+b>0$ なので，

$$(a+2b,\ 2a+b)=(27,\ -1),\ (9,\ -3),\ (3,\ -9),\ (1,\ -27)$$

さらに，$(a+2b)+(2a+b)=3(a+b)$ ……①に注意すると，

(i) $(a+2b,\ 2a+b)=(9,\ -3)$ のとき　$(a,\ b)=(-5,\ 7)$

(ii) $(a+2b,\ 2a+b)=(3,\ -9)$ のとき　$(a,\ b)=(-7,\ 5)$

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(-5,\ 7),\ (-7,\ 5)$ となる。

(3) 整数 a, b, c が(＊)および $a\neq b$ を満たすとき，(1)より，

$$c^2=-\frac{1}{3}(a+2b)(2a+b),\ (a+2b)(2a+b)=-3c^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の右辺が 3 の倍数より，$a+2b$，$2a+b$ の少なくとも一方は 3 の倍数である。

(i) $a+2b$ が 3 の倍数のとき　①から，$2a+b=3(a+b)-(a+2b)$

よって，$2a+b$ も 3 の倍数になる。

(ii) $2a+b$ が 3 の倍数のとき　①から，$a+2b=3(a+b)-(2a+b)$

よって，$a+2b$ も 3 の倍数になる。

(i)(ii)より，$a+2b$，$2a+b$ はともに 3 の倍数となる。

すると，$(a+2b)(2a+b)$ は 9 の倍数になり，②から c^2 は 3 の倍数，すなわち c は 3 の倍数である。

［解 説］

標準的な整数問題です。(2)で値を絞り込むために作った①式が，(3)の誘導になっています。