$\boxed{1}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}\ (x \geqq 0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$f(x)$ とその導関数の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$ をそれぞれ求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。

(3)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない。

2

解答解説のページへ

1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k=1$，出た目が 2 の場合は $X_k=-1$，その他の目が出た場合は $X_k=0$ とする。

$Y_k=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}X_k\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}X_k\right)$ とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　Z_2 が実数でない確率を求めよ。

(2)　Z_1，Z_2，Z_3，…，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ。

(3)　Z_n が実数となる確率を p_n とする。p_n を n を用いて表し，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す。$\angle ACB = n\angle ABC$ であるとき，$c < nb$ を示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

t を正の実数とする。xy 平面において，連立不等式

$$x \geqq 0\,,\ \ y \geqq 0\,,\ \ xy \leqq 1\,,\ \ x+y \leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(S(t)-2\log t\right)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を固定して b の値を変化させたとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。

(2)　a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}\ (x\geqq 0)$ に対して，$f(x)>0$ から両辺に対数をとり，

$$\log f(x)=\log(x+1)^{\frac{1}{x+1}}=\frac{\log(x+1)}{x+1}$$

両辺を微分して，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$ より，

$$f'(x)=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\cdot f(x)$$

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	↗		↘

これより，$f(x)$ の増減は右上表のようになり，最大値は $f(e-1)=e^{\frac{1}{e}}$ である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を利用すると，(1)から，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}=0$ となり，

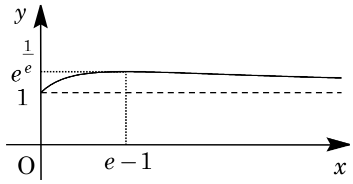
指数関数は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\log f(x)}=e^0=1$$

また，$f'(x)=\left\{\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{\log(x+1)}{x+1}\right\}\cdot f(x)$ と変形すると，

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$$

(3)　(2)から，$x\to\infty$ において，直線 $y=1$ が漸近線になることに注意すると，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



［解 説］

グラフの概形を問う基本題です。計算量も少なめです。

2

問題のページへ

(1)　$X_k = 1$，$X_k = -1$，$X_k = 0$ である確率が，それぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{4}{6}$ であるとき，$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$ とおく。そして，$Z_n = Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ とすると，

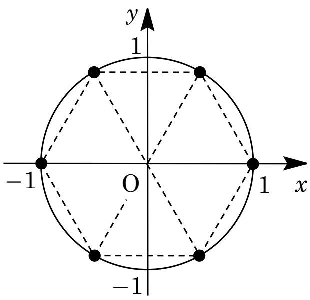
$$Z_n = \cos\frac{\pi}{3}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) + i\sin\frac{\pi}{3}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，Z_2 が実数でないのは，$-2 \leqq X_1 + X_2 \leqq 2$ に注意すると $X_1 + X_2 \neq 0$ より，

$$(X_1,\ X_2) = (1,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (0,\ -1)$$

その確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ となる。

(2)　まず，$(*)$から，Z_1，Z_2，…，Z_n は，複素数平面上で，右図の 6 つの点のいずれかである。そして，隣の点に移動する確率が $\frac{1}{6}$ ずつ，移動しない確率が $\frac{4}{6}$ となる。



ここで，Z_1，Z_2，Z_3，…，Z_n がいずれも実数でない確率を q_n とおくと，まず Z_1 が実数でないのは，$X_1 = 1$ または $X_1 = -1$ のときであり，その確率は，

$$q_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

次に，Z_n が実数でないとき，Z_{n+1} も実数でないのは，

(a)　$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \equiv 1 \pmod 3$ の場合

$X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = 1$ のときで，その確率は $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ となる。

(b)　$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \equiv 2 \pmod 3$ の場合

$X_{n+1} = 0$ または $X_{n+1} = -1$ のときで，その確率は $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ となる。

(a)(b)のいずれの場合も，$q_{n+1} = \frac{5}{6}q_n$ となることより，

$$q_n = q_1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(3)　Z_n が実数となる確率 p_n に対し，Z_{n+1} が実数となるのは，Z_n が実数かどうかで場合分けをすると，

(i)　Z_n が実数のとき　(Z_n が実数)→(Z_{n+1} が実数)となる確率は，$p_n\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{3}p_n$

(ii)　Z_n が実数でないとき　(Z_n が虚数)→(Z_{n+1} が実数)となる確率は，

$$(1 - p_n)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 - p_n)$$

(i)(ii)より，$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$

すると，$p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ のもとで，$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形して，

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{3}$ である。

［解　説］

複素数が題材の確率問題です。この問題のポイントは，Z_n が複素数平面上で正六角形の頂点として表せ，また「Z_n が実数」は「$X_1+X_2+\cdots+X_n$ が 3 の倍数」に対応することを読みとる点にあります。

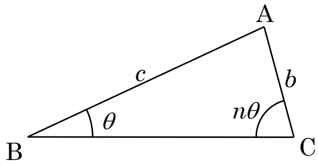
3

問題のページへ

$\triangle$ABC において，$\angle$ABC $=\theta$ とおくと，条件より，

$$\angle \mathrm{ACB} = n\angle \mathrm{ABC} = n\theta \ (n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

すると，$\theta + n\theta < \pi$ から $0 < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}$ ……(＊)となる。



$\triangle$ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin n\theta} = 2R$$

すると，$b = 2R\sin\theta$，$c = 2R\sin n\theta$ となり，$nb - c = 2R(n\sin\theta - \sin n\theta)$

ここで，$f(\theta) = n\sin\theta - \sin n\theta$ とおくと，$nb - c = 2Rf(\theta)$ となり，

$$f'(\theta) = n\cos\theta - n\cos n\theta = n(\cos\theta - \cos n\theta) = 2n\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-1}{2}\theta$$

(＊)から，$0 < \dfrac{n+1}{2}\theta < \dfrac{n+1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \dfrac{n-1}{2}\theta < \dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{2}$ なので，$f'(\theta) > 0$ となり，これより $f(\theta)$ は単調に増加し，

$$f(\theta) > f(0) = 0$$

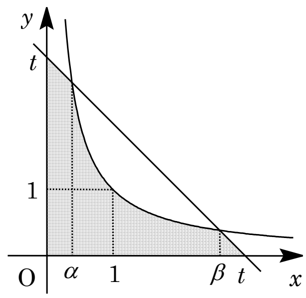
よって，$nb - c > 0$ となるので，$c < nb$ である。

[解　説]

三角比と図形に関する基本題です。なお，$n = 3$ の場合が文系で出題されています。

4

問題のページへ



$t>2$ において，連立不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$xy\leqq 1$，$x+y\leqq t$ の表す領域は右図の網点部となる。まず，領域の境界線 $xy=1$ と $x+y=t$ を連立して，

$$x(t-x)=1,\ x^2-tx+1=0$$

この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2},\ \beta=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$$

ここで，網点部の面積を $S(t)$ とおくと，

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}t^2-\int_\alpha^\beta\left(t-x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}t^2-t(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}\left[x^2\right]_\alpha^\beta+\left[\log x\right]_\alpha^\beta\\&=\frac{1}{2}t^2-t(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\log\beta-\log\alpha\\&=\frac{1}{2}t^2-t\sqrt{t^2-4}+\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}+\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}}\\&=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}+\log\frac{\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^2}{4}\\&=\frac{1}{2}t\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\end{aligned}$$

すると，$S(t)-2\log t=\frac{1}{2}t\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t}$ となり，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(S(t)-2\log t\right)&=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{2}t\cdot\frac{4}{t+\sqrt{t^2-4}}+2\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2t}\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+2\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}{2}\right\}\\&=\frac{2}{1+1}+2\log\frac{1+1}{2}=1\end{aligned}$$

［解　説］

面積と極限の融合問題です。極限を求めるための式変形は，頻出タイプのものです。

5

問題のページへ

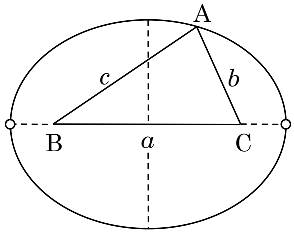
(1)　△ABC において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とすると，$a+b+c=2$ のもとで，三角形の形成条件 $|b-c|<a<b+c$ から，$|a+2b-2|<a<2-a$ となる。

すると，$-a<a+2b-2<a$ かつ $a<2-a$ より，

$0<a<1$，$1-a<b<1$ ………(＊)

そこで，a の値を $0<a<1$ で固定し，b の値を $1-a<b<1$ で変化させるとき，

$b+c=2-a$，$AC+AB=2-a$



これより，点 A の描く軌跡は，2 点 B，C を焦点とする楕円になる。

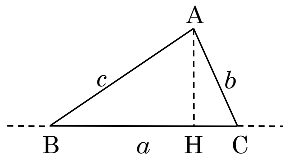
ここで，長軸の長さを $2p$ とおくと，$2p=2-a$ から，

$$p=1-\frac{a}{2}$$

また，短軸の長さを $2q$ とおくと，$q=\sqrt{\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-a}$

さて，△ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積 V は，A から直線 BC に垂線を下ろし，直線 BC との交点を H として，

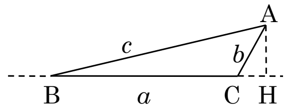
(i)　∠B と ∠C がともに 90° 以下のとき



$AH=h$，$CH=x$ とおくと，

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(a-x)+\frac{1}{3}\pi h^2 x=\frac{1}{3}\pi h^2 a$$

(ii)　∠B または ∠C が 90° より大のとき



$AH=h$，$CH=x$ とおくと，$\angle C>90°$ のとき，

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(a+x)-\frac{1}{3}\pi h^2 x=\frac{1}{3}\pi h^2 a$$

なお，$\angle B>90°$ のときも同様になる。

(i)(ii)のいずれの場合も，$V=\frac{1}{3}\pi h^2 a$ である。

これより，V が最大になるのは $h=AH$ が最大のとき，すなわち A が楕円の短軸上に位置するときであり，△ABC は辺 BC を底辺とする二等辺三角形となる。

なお，このとき $a+2b=2$ から $b=1-\frac{a}{2}$ となり，(＊)を満たしている。

(2)　a の値を固定したとき，V が最大になるのは，(1)から $h=q=\sqrt{1-a}$ のときより，

$$V=\frac{1}{3}\pi(1-a)a=\frac{1}{3}\pi(-a^2+a)=\frac{1}{3}\pi\left\{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$$

次に，a を $0<a<1$ で変化させると，V は $a=\frac{1}{2}\left(b=\frac{3}{4}\right)$ のとき最大になり，最大値は $\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{12}$ である。

［解 説］

1 文字固定型の最大・最小問題です。この問題の山場は, (1)の誘導において, 2 点からの距離の和が一定という条件を, 楕円の軌跡に翻訳する点です。