1

解答解説のページへ

a を $0 \leqq a < 2\pi$ を満たす実数とする。関数

$$f(x) = 2x^3 - (6+3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ はただ 1 つの極大値をもつことを示し，その極大値 $M(a)$ を求めよ。

(2)　$0 \leqq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値，最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ。

2

解答解説のページへ

円周を 3 等分する点を時計回りに A, B, C とおく。点 Q は A から出発し, A, B, C を以下のように移動する。1 個のさいころを投げて, 1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し, 2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し, その他の目が出た場合は移動しない。さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

3

解答解説のページへ

三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す。$\angle \mathrm{ACB} = 3\angle \mathrm{ABC}$ であるとき，$c < 3b$ を示せ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=2x^3-(6+3\sin a)x^2+(12\sin a)x+\sin^3 a+6\sin a+5$ に対して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-(12+6\sin a)x+12\sin a \\ &= 6\{x^2-(2+\sin a)x+2\sin a\} \\ &= 6(x-2)(x-\sin a) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$\sin a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになり，

ただ１つの極大値$M(a)$は，$M(a)=f(\sin a)$から，

$$\begin{aligned} M(a) &= 2\sin^3 a-(6+3\sin a)(\sin^2 a)+(12\sin^2 a)+\sin^3 a+6\sin a+5 \\ &= 6\sin^2 a+6\sin a+5 \end{aligned}$$

(2)　$0\leqq a<2\pi$ から $-1\leqq\sin a\leqq 1$ となり，(1)から，

$$M(a)=6\Big(\sin a+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{7}{2}$$

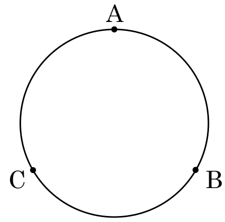
すると，$M(a)$ は $\sin a=1$ $\Big(a=\dfrac{\pi}{2}\Big)$ のとき最大値 17 をとり，$\sin a=-\dfrac{1}{2}$ $\Big(a=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi\Big)$ のとき最小値$\dfrac{7}{2}$をとる。

［解　説］

微分と増減の問題に，三角関数が絡んだ基本題です。

2

問題のページへ



(1)　右図のように円周上の 3 点 A, B, C があり，点 Q は A から出発し，さいころを投げて，1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し，2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し，その他の目が出た場合は移動しない。

さて，さいころを 2 回投げたあとに Q が A に位置するのは，A→B→A, A→C→A, A→A→A と点 Q が移動する場合より，その確率 p_2 は，

$$p_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

(2)　さいころを $n+1$ 回投げたあとに Q が A に位置する確率 p_{n+1} は，n 回投げたあとの Q の位置で場合分けをすると，

(i)　Q が A に位置するとき　A→A となる確率は，$p_n\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{3}p_n$

(ii)　Q が B または C に位置するとき　(A 以外)→A となる確率は，

$$(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1-p_n)$$

(i)(ii)より，$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots(*)$

(3)　$p_1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ のもとで，$(*)$から，$p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形すると，

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

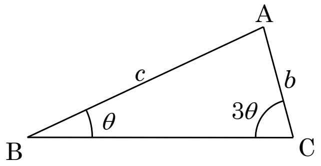
よって，$p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となる。

［解　説］

確率と漸化式の典型題です。誘導つきの立式のうえ，漸化式も基本形です。

3

問題のページへ



$\triangle$ABC において，$\angle \mathrm{ABC}=\theta$ とおくと，条件より，

$$\angle \mathrm{ACB}=3\angle \mathrm{ABC}=3\theta$$

すると，$\theta+3\theta<\pi$ から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ ……(＊)となる。

$\triangle$ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，

$$\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin 3\theta}=2R$$

すると，$b=2R\sin\theta$，$c=2R\sin 3\theta$ となり，

$$3b-c=2R(3\sin\theta-\sin 3\theta)=2R\{3\sin\theta-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\}=8R\sin^3\theta$$

(＊)から，$3b-c>0$ となるので，$c<3b$ である。

［解　説］

三角比と図形に関する基本題です。3 倍角の公式を導いた方がよいのか迷うほどの内容です。