1　　解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。ただし，log は自然対数，e はその底とする。

(1)　b を実数とする。関数 $f(x)=\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\dfrac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

(2)　$a \leqq b$ を満たす正の実数 $a,\ b$ に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。$I_n=\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$ を用いてもよい。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

自然数 a, b に対し，$w=\cos\dfrac{a\pi}{3+b}+i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$ とおく。ただし，i は虚数単位とする。複素数 z_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を以下のように定める。

$$z_1=1,\ z_2=1-w,\ z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$a=4$，$b=3$ のとき，複素数平面上の点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ。

(2)　$a=2$，$b=1$ のとき，z_{63} を求めよ。

(3)　さいころを 2 回投げ，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。このとき $z_{63}=0$ である確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 s, t が $s^2+t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき, xy 平面上で点 $(s+t,\ st)$ が動く領域を A とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。

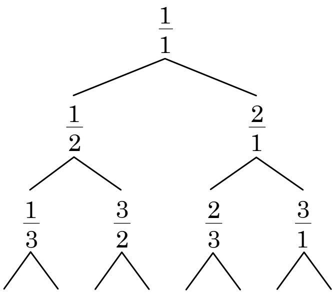
(2) A を図示せよ。

(3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

右の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である。このとき以下の問いに答えよ。



(1)　この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ。ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす。

(2)　すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ。

(3)　この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ。

(4)　$\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ。たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である。

5

解答解説のページへ

座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　b を実数とするとき，$f(x)=\displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ に対し，

$$f'(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x}{x^2+1}\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\frac{-(x^2+1)^2-(-x^2+1)+x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{-2}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

これより，$f'(x)<0$ となるので，$f(x)$ は単調に減少する。

(2)　$0<a\leqq b$ のとき，(1)から $f(a)\geqq f(b)$ となり，

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}\geqq\int_b^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}$$

よって，$\displaystyle\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ………①

また，$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ とおくと，$g(t)$ は $t>0$ で単調に減少し，$0<a\leqq t\leqq b$ において，$e^{-\frac{t^2}{2}}\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}$ となるので，

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq\int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}dt=e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\displaystyle\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$ ………③

(3)　$I_n=\displaystyle\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}dt$ に対し，$s=\sqrt{n}\,t$ とおくと，$ds=\sqrt{n}\,dt$ となり，

$$I_n=\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}}e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}ds=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

すると，③から，$\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-\frac{4n}{2}}\leqq\sqrt{n}I_n\leqq e^{-\frac{n}{2}}(2\sqrt{n}-\sqrt{n})$ となり，

$$\frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2}{4n+1}e^{-2n}\leqq I_n\leqq e^{-\frac{n}{2}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\displaystyle\frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2}{4n+1}e^{-2n}=\frac{1}{n+1}\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)e^{-\frac{n}{2}}$ なので，④から，

$$-\log(n+1)+\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)-\frac{n}{2}\leqq\log I_n\leqq-\frac{n}{2}$$

$$-\frac{1}{n}\log(n+1)+\frac{1}{n}\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)-\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{n}\log I_n\leqq-\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)=0$ なので，⑤から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n=-\frac{1}{2}$$

［解 説］

定積分と不等式および極限に関する標準的な問題です。(3)は, (2)の結果を利用するために, 冒頭での置換がポイントになっています。なお, ⑤式への変形は, 問題文のコメントからヒントを得ています。

2

問題のページへ

(1)　$w=\cos\dfrac{a\pi}{3+b}+i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$ ……①に対し，$a=4$，$b=3$ のとき，

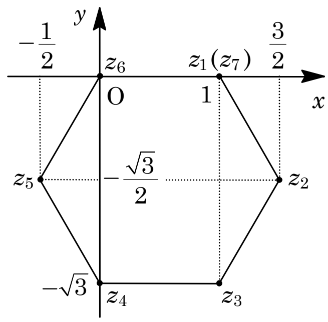
$$w=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ここで，$z_1=1$，$z_2=1-w=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，$z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}$ から，

$$z_n-z_{n-1}=w(z_{n-2}-z_{n-1})\ \cdots\cdots\cdots②$$

②から，点 z_n は点 z_{n-1} を中心として，点 z_{n-2} を $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点である。たとえば，点 z_3 は点 z_2 を中心として，点 z_1 を $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点，点 z_4 は点 z_3 を中心として，点 z_2 を $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点，…となる。

すると，点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形は，右図の正六角形である。

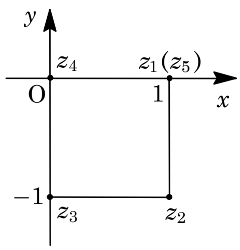


(2)　$a=2$，$b=1$ のとき，①から，$w=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$

これより，$z_1=1$，$z_2=1-i$ となり，②から，点 z_n は点 z_{n-1} を中心として，点 z_{n-2} を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

すると，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 z_n を順に線分で結んでできる図形は，右図の正方形となり，

$$z_{63}=z_{4\times15+3}=z_3=-i$$



(3)　まず，$z_1=1$，$z_2=1-w$ で，②から，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=w(z_n-z_{n+1})=-w(z_{n+1}-z_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$u_n=z_{n+1}-z_n$ とおくと，$u_1=(1-w)-1=-w$ で，③から，

$$u_{n+1}=(-w)u_n$$

すると，$u_n=u_1(-w)^{n-1}=(-w)^n$，すなわち $z_{n+1}-z_n=(-w)^n$ ………④

(i)　$-w=1\ (w=-1)$ のとき

④より，$z_n=z_1+(n-1)\cdot1=1+n-1=n$ となり，$z_{63}=63\neq0$ である。

(ii)　$-w\neq1\ (w\neq-1)$ のとき

④より，$n\geqq2$ で，$z_n=z_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-w)^k=1+\frac{-w\{1-(-w)^{n-1}\}}{1+w}=\frac{1-(-w)^n}{1+w}$

すると，$z_{63}=0$ から $(-w)^{63}=1$，すなわち $w^{63}=-1$ である。

(i)(ii)より，$z_{63}=0$ となる w の条件は，$w\neq-1$ ……⑤かつ $w^{63}=-1$ ……⑥である。

さて，$1\leqq a\leqq6$，$1\leqq b\leqq6$ から，$\dfrac{\pi}{9}\leqq\dfrac{a\pi}{3+b}\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ ………⑦

⑦のもとで①⑤から，$\dfrac{a\pi}{3+b}\neq\pi$ となり，$a\neq 3+b$ ………⑧

また，①から，$w^{63}=\cos\dfrac{63a\pi}{3+b}+i\sin\dfrac{63a\pi}{3+b}$ となり，⑦から，

$$7\pi\leqq\frac{63a\pi}{3+b}\leqq\frac{189}{2}\pi=94.5\pi$$

そこで，⑥より $\dfrac{63a\pi}{3+b}=(2n+1)\pi$ （n は整数）となり，$\dfrac{63a}{3+b}=2n+1$ ………⑨

ただし，$7\leqq 2n+1\leqq 93$ ……⑩である。

(i)　$b=1$ のとき　⑨から $\dfrac{63a}{4}=2n+1$ となり，⑧から $a\neq 4$ なので不成立。

(ii)　$b=2$ のとき　⑨から $\dfrac{63a}{5}=2n+1$ となり，⑧から $a\neq 5$ なので不成立。

(iii)　$b=3$ のとき　⑨から $\dfrac{63a}{6}=2n+1$ となり，$\dfrac{21a}{2}=2n+1$ から $a=2,\ 6$

$a=2$ のとき $2n+1=21$ より⑩を満たし，$a=6$ のとき⑧から不成立。

(iv)　$b=4$ のとき　⑨から $\dfrac{63a}{7}=2n+1$ となり，$9a=2n+1$ から $a=1,\ 3,\ 5$

$a=1$ のとき $2n+1=9$，$a=3$ のとき $2n+1=27$，$a=5$ のとき $2n+1=45$ より，すべて⑩を満たす。

(v)　$b=5$ のとき　⑨から $\dfrac{63a}{8}=2n+1$ となり，満たす a はない。

(vi)　$b=6$ のとき　⑨から $\dfrac{63a}{9}=2n+1$ となり，$7a=2n+1$ から $a=1,\ 3,\ 5$

$a=1$ のとき $2n+1=7$，$a=3$ のとき $2n+1=21$，$a=5$ のとき $2n+1=35$ より，すべて⑩を満たす。

(i)〜(vi)より，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (1,\ 4),\ (3,\ 4),\ (5,\ 4),\ (1,\ 6),\ (3,\ 6),\ (5,\ 6)$

以上より，$z_{63}=0$ である確率は $\dfrac{7}{36}$ である。

［解　説］

複素数平面上における点の移動の問題に，確率が融合しています。(1)と(2)は与えられた漸化式を②に変形すると，その意味がわかります。(3)は a と b の条件をいったん求めた後，詰めの作業が面倒です。

3　　問題のページへ

(1)　実数 s, t が $s^2+t^2 \leqq 6$ のとき，$(x,\ y)=(s+t,\ st)$ とおき，点 $(x,\ y)$ が動く領域を A とする。

ここで，$(x,\ y)=(2,\ \sqrt{2})$ のとき，$s+t=2$，$st=\sqrt{2}$ から，s, t は 2 次方程式 $u^2-2u+\sqrt{2}=0$ の 2 つの解となるが，$D/4=1-\sqrt{2}<0$ なので実数でない。

よって，$(2,\ \sqrt{2})$ は領域 A の点でない。

(2)　まず，$s+t=x$，$st=y$ から，s, t は 2 次方程式 $u^2-xu+y=0$ の解となり，

$$D=x^2-4y \geqq 0,\ \ y \leqq \frac{1}{4}x^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$s^2+t^2 \leqq 6$ から，$(s+t)^2-2st \leqq 6$ となり，

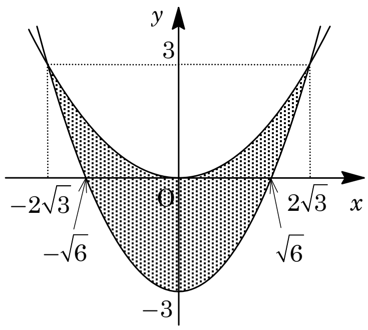
$$x^2-2y \leqq 6,\ \ y \geqq \frac{1}{2}x^2-3 \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②の境界線の共有点は，$\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{1}{2}x^2-3$ より，

$$\frac{1}{4}x^2=3,\ \ x^2=12$$

よって，$x=\pm 2\sqrt{3}$，$y=\dfrac{1}{4}\cdot 12=3$

したがって，①②から領域 A は右図の網点部となる。ただし，境界は含む。

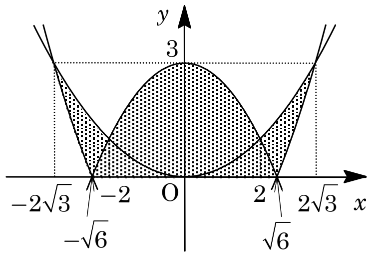


(3) 領域 A の $y \leqq 0$ の部分を x 軸に関して折り返すと，右図の網点部になり，②の境界線は

$$y=-\frac{1}{2}x^2+3 \cdots\cdots\cdots ③$$

そして，①の境界線と③の共有点は，

$$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x^2+3,\ \ x=\pm 2$$



さて，A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体は，上図の網点部の x 軸のまわりの回転体に一致し，y 軸に関する対称性から，その体積 V は，

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2dx+\pi\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2dx-\pi\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2dx$$

ここで，$\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2dx=\left[\frac{x^5}{80}\right]_2^{2\sqrt{3}}=\frac{18}{5}\sqrt{3}-\frac{2}{5}$

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2dx=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx=\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_0^2=\frac{58}{5}$$

$$\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2dx=\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx=\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}$$

$$=\left(\frac{72}{5}\sqrt{3}-24\sqrt{3}+18\sqrt{3}\right)-\left(\frac{9}{5}\sqrt{6}-6\sqrt{6}+9\sqrt{6}\right)=\frac{42}{5}\sqrt{3}-\frac{24}{5}\sqrt{6}$$

よって，$\dfrac{V}{2}=\left(\dfrac{58}{5}+\dfrac{18}{5}\sqrt{3}-\dfrac{2}{5}-\dfrac{42}{5}\sqrt{3}+\dfrac{24}{5}\sqrt{6}\right)\pi=\dfrac{56-24\sqrt{3}+24\sqrt{6}}{5}\pi$ から，

$$V=\frac{112-48\sqrt{3}+48\sqrt{6}}{5}\pi$$

［解 説］

領域の典型題に回転体の体積計算を付加した問題です。ただ，後半の定積分の数値計算はやや難です。

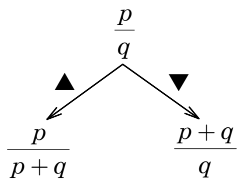
4

問題のページへ

(1)　自然数 $p,\ q$ に対して，p と q の最大公約数は p と $p+q$ の約数となり，また p と $p+q$ の最大公約数は p と $q=(p+q)-p$ の約数となる。これより，p と q の最大公約数は p と $p+q$ の最大公約数に等しい。

同様に，p と q の最大公約数は q と $p+q$ の最大公約数に等しい。

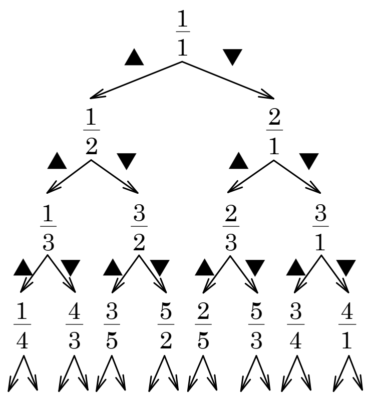
さて，題意の樹形図に現れる分数に対して，$\dfrac{p}{q}\to\dfrac{p}{p+q}$ を「操作▲」，$\dfrac{p}{q}\to\dfrac{p+q}{q}$ を「操作▼」と表す。



すると，樹形図の 1 段目にある $\dfrac{p}{q}=\dfrac{1}{1}$ は既約分数，すなわち p と q の最大公約数は 1 なので，操作▲または▼によって現れる分数の分子と分母の最大公約数は 1 である。

したがって，樹形図に現れる分数はすべて既約分数である。

(2)　樹形図の 1 段目が $\dfrac{1}{1}$ なので，分数 $\dfrac{1}{n}$ は操作▲を $n-1$ 回繰り返した n 段目の左端にのみに現れ，また分数 $\dfrac{n}{1}$ は操作▼を $n-1$ 回繰り返した n 段目の右端にのみに現れる。



さて，$p,\ q$ を自然数として，既約分数 $\dfrac{p}{q}$ について，操作▲や▼の逆操作をもとに，上の段への移動を考える。そして，$p=q$ のときは $\dfrac{1}{1}$ だけなので，$p\neq q$ の場合について調べると，

(i)　$2\leqq p<q$ のとき　操作▲の逆操作から，$\dfrac{p}{q}\to\dfrac{p}{q-p}$ と移動する。

(ii)　$2\leqq q<p$ のとき　操作▼の逆操作から，$\dfrac{p}{q}\to\dfrac{p-q}{q}$ と移動する。

さて，任意の既約分数 $\dfrac{p_0}{q_0}$（$p_0,\ q_0$ は 2 以上の自然数）に対して，分子が分母より小さいときは(i)の操作，分子が分母より大きいときは(ii)の操作を行う。

これを繰り返して上の段へ移動していくと，分子と分母の和は単調に減少し，有限回の移動の後に，$\dfrac{n+1}{n}\to\dfrac{1}{n}$ または $\dfrac{n}{n+1}\to\dfrac{n}{1}$ となる。$\dfrac{1}{n}$ または $\dfrac{n}{1}$ は樹形図の n 段目に存在することより，既約分数 $\dfrac{p_0}{q_0}$ は樹形図の中に存在することになる。

したがって，すべての正の有理数がこの樹形図に現れる。

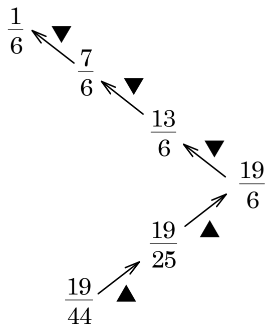
(3)　まず，$\dfrac{1}{n}$ と $\dfrac{n}{1}$ は樹形図の n 段目にただ 1 つだけ存在する。

次に，既約分数 $\dfrac{p_0}{q_0}$（p_0，q_0 は 2 以上の自然数）に対しては，(2)と同様に上の段への移動を考えると，$\dfrac{1}{n}$ または $\dfrac{n}{1}$ へのルートはただ 1 つであり，すなわち $\dfrac{p_0}{q_0}$ から $\dfrac{1}{1}$ へのルートはただ 1 つに定まる。すると，$\dfrac{p_0}{q_0}$ は樹形図の中にただ 1 つ存在することになる。

したがって，樹形図に現れる有理数はすべて異なる。

(4)　(2)の(i)または(ii)の操作を繰り返し行うと，$\dfrac{19}{44}$ から $\dfrac{1}{n}$ または $\dfrac{n}{1}$ へのルートは，

$$\frac{19}{44}\xrightarrow{\text{(i)}}\frac{19}{25}\xrightarrow{\text{(i)}}\frac{19}{6}\xrightarrow{\text{(ii)}}\frac{13}{6}\xrightarrow{\text{(ii)}}\frac{7}{6}\xrightarrow{\text{(ii)}}\frac{1}{6}$$



そこで，$\dfrac{1}{6}$ は 6 段目の左から 1 番目なので，$\dfrac{7}{6}$ は 7 段目の左から 2 番目，$\dfrac{13}{6}$ は 8 段目の左から 4 番目，$\dfrac{19}{6}$ は 9 段目の左から 8 番目である。

さらに，$\dfrac{19}{25}$ は 10 段目の左から $2\times7+1=15$ 番目となり，$\dfrac{19}{44}$ は 11 段目の左から $2\times14+1=29$ 番目である。

［解　説］

有理数を題材にした論証問題です。(4)の具体例を先に考えればわかることですが，樹形図の上から下へは，当然，枝分かれがあるものの，下から上へは 1 つのルートしかありません。この点に注目して記述しました。なお，解答例では，左端と右端の枝分かれについては特別扱いしています。

5

問題のページへ

(1)　球面 $S_1:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$ ……①は中心 A$(1,\ 1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{7}$，球面 $S_2:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$ ……②は中心 B$(2,\ 3,\ 3)$ で半径 1 である。

すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$ であり，

$$\sqrt{7}-1<\mathrm{AB}<\sqrt{7}+1$$

よって，S_1 と S_2 は交わり，その共通部分 C は円となる。

この円 C を含む平面 π は，①－②から，$(2x-3)+2(2y-4)+2(2z-4)=6$

$$2x+4y+4z=25 \cdots\cdots③$$

また，直線 AB は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2,\ 2)$ から，t を実数として，

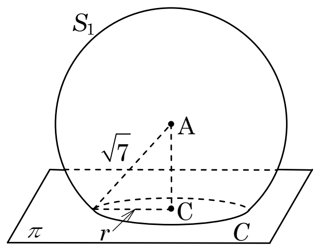
$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ 2) \cdots\cdots④$$

円 C の中心 C は，平面 π と直線 AB との交点なので，④を③に代入し，

$$2(1+t)+4(1+2t)+4(1+2t)=25,\ 18t+10=25$$

よって，$t=\dfrac{5}{6}$ より，中心の座標は $\mathrm{C}\Big(\dfrac{11}{6},\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{8}{3}\Big)$ となり，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\Big(\frac{5}{6}\Big)^2+\Big(\frac{5}{3}\Big)^2+\Big(\frac{5}{3}\Big)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{1+4+4}=\frac{5}{2}$$



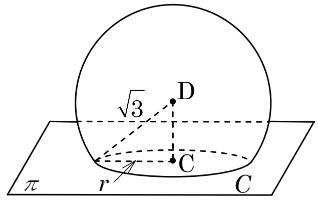
これより，円 C の半径 r は，

$$r=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\Big(\frac{5}{2}\Big)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，円 C を含む球面で半径が最小となるものは，円 C が大円になる球面なので，その方程式は，

$$\Big(x-\frac{11}{6}\Big)^2+\Big(y-\frac{8}{3}\Big)^2+\Big(z-\frac{8}{3}\Big)^2=\frac{3}{4}$$

(2)　円 C を含み，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の中心を D とおくと，$\mathrm{DC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2}=\dfrac{3}{2}$ ……⑤となる。



また，点 D は直線 AB 上の点なので，④から D$(1+t,\ 1+2t,\ 1+2t)$ とおけ，

$$\mathrm{DC}=\sqrt{\Big(1+t-\frac{11}{6}\Big)^2+\Big(1+2t-\frac{8}{3}\Big)^2+\Big(1+2t-\frac{8}{3}\Big)^2}$$

$$=\sqrt{\Big(t-\frac{5}{6}\Big)^2+2\Big(2t-\frac{5}{3}\Big)^2} \cdots\cdots⑥$$

すると，⑤⑥から，$\Big(t-\dfrac{5}{6}\Big)^2+2\Big(2t-\dfrac{5}{3}\Big)^2=\dfrac{9}{4}$ となり，

$$9t^2-15t+4=0,\ (3t-1)(3t-4)=0$$

よって，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき $\mathrm{D}\Big(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\Big)$，$t=\dfrac{4}{3}$ のとき $\mathrm{D}\Big(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3}\Big)$ なので，求める球面の方程式は，

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,\ \left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3$$

［解　説］

交わる 2 つの球面を題材にした問題で，以前は超頻出だったものです。いろいろな解法がありますが，平面の方程式がほぼ「常識化」したという背景も考え，解答例では 2 つの球面の交線を含む平面に注目しています。