1　　　　解答解説のページへ

xy 平面において，連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi\ ,\ \ 0 \leqq y \leqq \pi\ ,\ \ 2\sin(x+y)-2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$$

の表す領域を D とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　D を図示せよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

p を実数の定数とする。x の 2 次方程式

$$x^2-(2p+|p|-|p+1|+1)x+\frac{1}{2}(2p+3|p|-|p+1|-1)=0$$

について以下の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式は実数解をもつことを示せ。

(2)　この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ ……①，$0 \leqq y \leqq \pi$ ……②において，

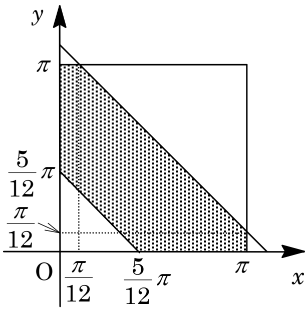
$$2\sin(x+y)-2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2} \ \cdots\cdots\cdots③$$

③より，$2\sqrt{2}\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \sqrt{2}$，$\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{1}{2}$ ………④

ここで，①②から $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x+y-\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{7}{4}\pi$ なので，④の解は $\dfrac{\pi}{6} \leqq x+y-\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ となり，

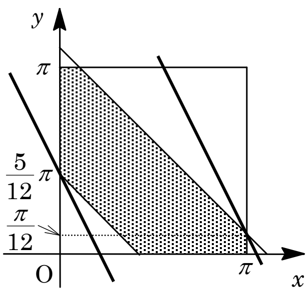
$$\frac{5}{12}\pi \leqq x+y \leqq \frac{13}{12}\pi \ \cdots\cdots\cdots⑤$$

すると，連立不等式①②③は①②⑤と同値なので，この表す領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含む。



(2)　$2x+y=k$ とおくと $y=-2x+k$ となり，この傾き -2 の直線が領域 D と共有点をもつときの，k の最大値と最小値を求める。

すると，右図より，$(x,\ y)=\left(\pi,\ \dfrac{\pi}{12}\right)$ のとき最大値 $k=2\pi+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{25}{12}\pi$ をとり，$(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$ のとき最小値 $k=0+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{5}{12}\pi$ をとる。



［解　説］

三角関数と領域についての基本題です。計算や図示に難しい部分はありません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$x^2-(2p+|p|-|p+1|+1)x+\dfrac{1}{2}(2p+3|p|-|p+1|-1)=0$ ……(＊)に対して,

(i)　$p<-1$ のとき　$|p|=-p$，$|p+1|=-p-1$ となるので，(＊)は,

$$x^2-(2p+2)x=0,\ x\{x-(2p+2)\}=0$$

これより，実数解 $x=0,\ 2p+2$ をもつ。

(ii)　$-1\leqq p<0$ のとき　$|p|=-p$，$|p+1|=p+1$ となるので，(＊)は,

$$x^2-(p+1)=0$$

これより，実数解 $x=\pm\sqrt{p+1}$ をもつ。

(iii)　$p\geqq 0$ のとき　$|p|=p$，$|p+1|=p+1$ となるので，(＊)は,

$$x^2-2px+(2p-1)=0,\ (x-1)\{x-(2p-1)\}=0$$

これより，実数解 $x=1,\ 2p-1$ をもつ。

(i)〜(iii)より，どんな実数 p に対しても，2 次方程式(＊)は実数解をもつ。

(2)　2 次方程式(＊)が異なる 2 つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ より，

(i)　$p<-1$ のとき　$2p+2\neq 0$ に注意すると，$\alpha\neq\beta$ である。

そして，$\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ から，$(2p+2)^2\leqq 1$ となり，

$$(2p+2+1)(2p+2-1)\leqq 0,\ (2p+3)(2p+1)\leqq 0$$

よって，$p<-1$ と合わせると，$-\dfrac{3}{2}\leqq p<-1$

(ii)　$-1\leqq p<0$ のとき　$\alpha\neq\beta$ から $-\sqrt{p+1}\neq\sqrt{p+1}$ となり，$p\neq -1$

そして，$\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ から，$(p+1)+(p+1)\leqq 1$ となり，

$$2p+2\leqq 1,\ p\leqq -\frac{1}{2}$$

よって，$-1\leqq p<0$ かつ $p\neq -1$ と合わせると，$-1<p\leqq -\dfrac{1}{2}$

(iii)　$p\geqq 0$ のとき　$\alpha\neq\beta$ から $2p-1\neq 1$ となり，$p\neq 1$

そして，$\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ から，$1+(2p-1)^2\leqq 1$ となり，

$$(2p-1)^2\leqq 0,\ p=\frac{1}{2}$$

よって，$p\geqq 0$ かつ $p\neq 1$ と合わせると，$p=\dfrac{1}{2}$

(i)〜(iii)より，p の値の範囲は，$-\dfrac{3}{2}\leqq p<-1$，$-1<p\leqq -\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

絶対値を丁寧にはずし，計算ミスに注意するだけの問題です。

3　　　　問題のページへ

(1)　球面 $S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$ ……①は中心 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{7}$，球面 $S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$ ……②は中心 $\mathrm{B}(2,\ 3,\ 3)$ で半径 1 である。

すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$ であり，

$$\sqrt{7}-1<\mathrm{AB}<\sqrt{7}+1$$

よって，S_1 と S_2 は交わり，その共通部分 C は円となる。

この円 C を含む平面 π は，①－②から，$(2x-3)+2(2y-4)+2(2z-4)=6$

$$2x+4y+4z=25 \cdots\cdots③$$

また，直線 AB は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2,\ 2)$ から，t を実数として，

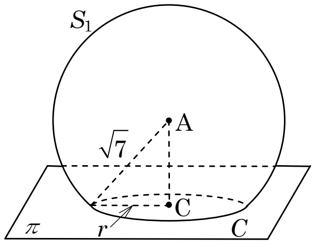
$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ 2) \cdots\cdots④$$

円 C の中心 C は，平面 π と直線 AB との交点なので，④を③に代入し，

$$2(1+t)+4(1+2t)+4(1+2t)=25,\ 18t+10=25$$

よって，$t=\dfrac{5}{6}$ より，中心の座標は $\mathrm{C}\left(\dfrac{11}{6},\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$ となり，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{1+4+4}=\frac{5}{2}$$



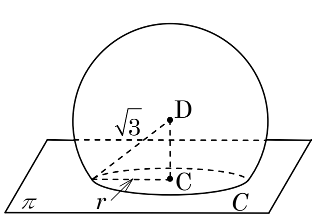
これより，円 C の半径 r は，

$$r=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，円 C を含む球面で半径が最小となるものは，円 C が大円になる球面なので，その方程式は，

$$\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$$

(2)　円 C を含み，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の中心を D とおくと，$\mathrm{DC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$ ……⑤となる。



また，点 D は直線 AB 上の点なので，④から $\mathrm{D}(1+t,\ 1+2t,\ 1+2t)$ とおけ，

$$\mathrm{DC}=\sqrt{\left(1+t-\frac{11}{6}\right)^2+\left(1+2t-\frac{8}{3}\right)^2+\left(1+2t-\frac{8}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(t-\frac{5}{6}\right)^2+2\left(2t-\frac{5}{3}\right)^2} \cdots\cdots⑥$$

すると，⑤⑥から，$\left(t-\dfrac{5}{6}\right)^2+2\left(2t-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{9}{4}$ となり，

$$9t^2-15t+4=0,\ (3t-1)(3t-4)=0$$

よって，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき $\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$，$t=\dfrac{4}{3}$ のとき $\mathrm{D}\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$ なので，求める球面の方程式は，

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,\ \left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3$$

［解　説］

交わる 2 つの球面を題材にした問題で，以前は超頻出だったものです。いろいろな解法がありますが，平面の方程式がほぼ「常識化」したという背景も考え，解答例では 2 つの球面の交線を含む平面に注目しています。