$\boxed{1}$ 　　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$の第 1 項から第 n 項までの和S_nが，$S_n = \dfrac{7}{6}(a_n - 1)$を満たすとき，以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$とする。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　a_nが 89 桁の整数となるとき，nを求めよ。

(3)　nを(2)で求めたものとする。a_nの 1 の位の数字を求めよ。

(4)　nを(2)で求めたものとする。a_nの最高位の数字を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a<0$，$b>0$ とする。2 つの曲線 $C: y=\dfrac{1}{x^2+1}$ と $D: y=ax^2+b$ がある。いま，$x>0$ で C と D が共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。その共有点の x 座標を t とし，D と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) D と x 軸の交点の x 座標を $\pm p$ とし，$p>0$ とする。S を a と p を用いて表せ。

(2) a, b を t を用いて表せ。

(3) S を t を用いて表せ。

(4) $t>0$ の範囲で，S が最大となるような D の方程式を求めよ。

3

解答解説のページへ

箱の中に, 1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり, 全部で 9 枚入っている。A, B, C の 3 人がこの箱から札を無作為に取り出す。A と B が 2 枚ずつ, C が 3 枚取り出すとき, 以下の問いに答えよ。

(1) A がもつ札の数字が同じである確率を求めよ。

(2) A がもつ札の数字が異なり, B がもつ札の数字も異なり, かつ, C がもつ札の数字もすべて異なる確率を求めよ。

(3) A がもつ札の数字のいずれかが, C がもつ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

$0<x<y$ とする。平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを x, 辺 BC の長さを y, $\angle \mathrm{ABC}=2\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。平行四辺形 ABCD の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_{A}, l_{B}, l_{C}, l_{D} とし，l_{A} と l_{B} の交点を E, l_{B} と l_{C} の交点を F, l_{C} と l_{D} の交点を G, l_{D} と l_{A} の交点を H とする。平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\angle \mathrm{FEH}$ を求めよ。

(2)　線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。

(3)　点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるような，x, y の条件を求めよ。

(4)　S を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$S_n=\dfrac{7}{6}(a_n-1)$ のとき $S_1=\dfrac{7}{6}(a_1-1)$ となり，$a_1=\dfrac{7}{6}(a_1-1)$ から $a_1=7$ である。

また，$S_{n+1}=\dfrac{7}{6}(a_{n+1}-1)$ なので，$S_{n+1}-S_n=\dfrac{7}{6}(a_{n+1}-1)-\dfrac{7}{6}(a_n-1)$ となり，

$$a_{n+1}=\frac{7}{6}(a_{n+1}-a_n),\quad 6a_{n+1}=7(a_{n+1}-a_n)$$

これから，$a_{n+1}=7a_n$ なので，$a_n=7\cdot7^{n-1}=7^n$ である。

(2)　a_n が 89 桁の整数から，$10^{88}\leqq 7^n<10^{89}$，$\log_{10}10^{88}\leqq\log_{10}7^n<\log_{10}10^{89}$

$$88\leqq n\log_{10}7<89,\quad \frac{88}{\log_{10}7}\leqq n<\frac{89}{\log_{10}7}$$

ここで，$\log_{10}7=0.8451$ から $104.1<n<105.4$ となり，n は整数なので，

$$n=105$$

(3)　$a_{105}=7^{105}$ となり，7^{105} の 1 の位の数字を求めるために，以下，mod10 で記すと，

$$7^1\equiv7,\ 7^2\equiv9,\ 7^3\equiv3,\ 7^4\equiv1,\ 7^5\equiv7,\ 7^6\equiv9,\ \cdots\cdots$$

すると，k を 0 以上の整数として，次のように推測できる。

$$7^{4k+1}\equiv7,\ 7^{4k+2}\equiv9,\ 7^{4k+3}\equiv3,\ 7^{4k+4}\equiv1\ \cdots\cdots(*)$$

さて，m を自然数として，$7^{m+4}-7^m=(7^4-1)\cdot7^m=2400\cdot7^m\equiv0$ であり，これより $7^{m+4}\equiv7^m$ となるので，推測(*)は成り立っている。

よって，$7^{105}=7^{4\times26+1}\equiv7$ から，7^{105} の 1 の位の数字は 7 である。

(4)　$\log_{10}7^{105}=105\log_{10}7=88.7355$ となる。

ここで，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ を用いると，

$$\log_{10}5=\log_{10}10-\log_{10}2=0.6990,\quad \log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$$

すると，$88+\log_{10}5<\log_{10}7^{105}<88+\log_{10}6$ となり，$5\cdot10^{88}<7^{105}<6\cdot10^{88}$

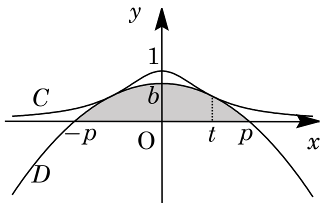
よって，7^{105} の最高位の数字は 5 である。

［解 説］

数列の和と対数計算の融合問題です。(3)と(4)は，どちらも頻出題です。

2

問題のページへ



(1)　曲線$D: y = ax^2 + b\ (a<0,\ b>0)$に対し，$D$と$x$軸の交点を$x = \pm p\ (p>0)$とすると，$D$と$x$軸で囲まれた部分の面積$S$は，

$$S = \int_{-p}^{p}(ax^2+b)dx = a\int_{-p}^{p}(x+p)(x-p)dx$$

$$= -\frac{a}{6}(p+p)^3 = -\frac{4}{3}ap^3$$

(2)　曲線$C: y = \dfrac{1}{x^2+1}$に対し$y' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$，曲線$D$に対し$y' = 2ax$となり，この2つの曲線について，$x = t\ (t>0)$での接線が一致していることより，

$$-\frac{2t}{(t^2+1)^2} = 2at \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{1}{t^2+1} = at^2 + b \cdots\cdots\cdots②$$

①より$a = -\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$……③となり，③を②に代入すると，

$$b = \frac{1}{t^2+1} + \frac{t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2} \cdots\cdots\cdots④$$

(3)　曲線Dが点$(p,\ 0)$を通ることから$ap^2+b=0$となり，$p>0$から③④より，

$$p = \sqrt{-\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\cdot(t^2+1)^2} = \sqrt{2t^2+1}$$

(1)から，$S = -\dfrac{4}{3}ap^3 = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{(t^2+1)^2}\cdot(2t^2+1)\sqrt{2t^2+1} = \dfrac{4(2t^2+1)\sqrt{2t^2+1}}{3(t^2+1)^2}$

(4)　$u = t^2+1$とおくと，$t>0$から$u>1$となり，(3)より，

$$S = \frac{4(2u-1)\sqrt{2u-1}}{3u^2} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(2u-1)^3}{u^4}}$$

ここで，$f(u) = \dfrac{(2u-1)^3}{u^4}$とおくと$S = \dfrac{4}{3}\sqrt{f(u)}$となり，

$$f'(u) = \frac{6(2u-1)^2\cdot u^4 - (2u-1)^3\cdot 4u^3}{u^8} = \frac{2(2u-1)^2}{u^5}\cdot\{3u - 2(2u-1)\}$$

$$= -\frac{2(2u-1)^2(u-2)}{u^5}$$

u	1	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	1	↗		↘	0

これより$f(u)$の増減は右表のようになり，$u=2$のとき$S = \dfrac{4}{3}\sqrt{f(u)}$は最大となる。

このとき，$t = \sqrt{u-1} = 1$となり，③④から$a = -\dfrac{1}{4}$，$b = \dfrac{3}{4}$なので，

$$D: y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。誘導が非常に丁寧です。(3)と(4)の設問だけでもよいのではないかと思うほどです。

3

問題のページへ

(1)　1, 2, 3 の札がそれぞれ 3 枚ずつ入っている箱から, A が 2 枚の札を取り出すとき, ${}_9C_2$ 通りの場合が同様に確からしいとすると, 取り出した 2 枚の数字が同じであるのは ${}_3C_1\times{}_3C_2$ 通りとなり, その確率は,

$$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$$

(2)　C が 3 枚取り出し, 次に A が 2 枚取り出し, さらに B が 2 枚取り出すと考える。

まず, C がもつ札の数字がすべて異なるのは, 1, 2, 3 の札を 1 枚ずつ取り出したときで, その確率は $\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_9C_3}=\frac{3\times3\times3}{84}=\frac{9}{28}$ である。

次に, A がもつ札の数字がすべて異なるのは, 1, 2, 3 の札が 2 枚ずつ入っている箱から, 1 の札を 2 枚, 2 の札を 2 枚, 3 の札を 2 枚取り出した場合を除けばよく, その確率は $1-\frac{{}_2C_2+{}_2C_2+{}_2C_2}{{}_6C_2}=1-\frac{3}{15}=\frac{4}{5}$ である。

さらに, B がもつ札の数字がすべて異なるのは, たとえば A が 1 と 2 の札を 1 枚ずつ取り出した場合は, 1, 2, 3, 3 の札が入っている箱から, 3 の札を 2 枚取り出した場合を除けばよい。A が 1 と 3 の札を 1 枚ずつ, 2 と 3 の札を 1 枚ずつ取り出した場合も同じであり, その確率はいずれも $1-\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ である。

したがって, A がもつ札の数字が異なり, B がもつ札の数字も異なり, C がもつ札の数字もすべて異なる確率は, $\frac{9}{28}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{3}{14}$ である。

(3)　A が 2 枚取り出し, 次に C が 3 枚取り出すと考える。

まず, A の札の数字と C の札の数字がすべて異なる場合について考え, (1)の結果を用いると,

(i)　A の札の数字が同じとき

C は A の札の数字以外の 6 枚から 3 枚を取り出すことになり, その確率は,

$$\frac{1}{4}\times\frac{{}_6C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{4}\times\frac{20}{35}=\frac{20}{140}$$

(ii)　A の札の数字が異なるとき

C は A の札の数字以外の 3 枚から 3 枚を取り出すことになり, その確率は,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{35}=\frac{3}{140}$$

(i)(ii)より, A の札の数字と C の札の数字がすべて異なる確率は,

$$\frac{20}{140}+\frac{3}{140}=\frac{23}{140}$$

したがって, A の札の数字のいずれかが, C の札の数字のいずれかと同じ確率は,

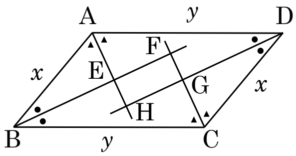
$$1-\frac{23}{140}=\frac{117}{140}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(2)は，場合分けを避けるために C→A→B の順に取り出したと考えています。また，(3)は余事象の利用がポイントです。

4

問題のページへ



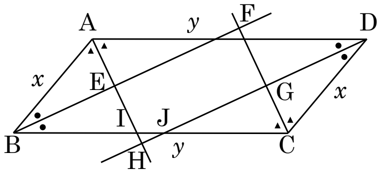
(1)　$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{BC}=y$ $(0<x<y)$ である平行四辺形 ABCD において，内角の二等分線の交点を右図のように E, F, G, H とする。そして，$\angle\mathrm{ABC}=2\theta$，$\angle\mathrm{BAD}=2\varphi$ とおくと，

$$2\theta+2\varphi=\pi\,,\ \ \theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

すると，$\angle\mathrm{FEH}=\angle\mathrm{AEB}=\pi-(\theta+\varphi)=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(2)　(1)から，平行四辺形 EFGH は長方形となり，$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{AHD}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\mathrm{AE}=x\sin\theta\,,\ \ \mathrm{AH}=y\sin\theta$$



(3)　点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるとき，辺 BC と線分 AH の交点を I とおくと，$\mathrm{AH}>\mathrm{AI}$ である。このとき $\triangle\mathrm{AEB}\equiv\triangle\mathrm{IEB}$ から $\mathrm{AE}=\mathrm{IE}$ となり，

$$\mathrm{AH}>\mathrm{AI}=2\mathrm{AE}\,,\ \ y\sin\theta>2x\sin\theta$$

よって，求める条件は，$y>2x$ である。

(4)　平行四辺形 ABCD と長方形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。

(i)　$y\leqq 2x$ のとき　点 H は平行四辺形 ABCD の内部または辺上にある。

$$\mathrm{EH}=\mathrm{AH}-\mathrm{AE}=y\sin\theta-x\sin\theta=(y-x)\sin\theta$$

$$\mathrm{GH}=\mathrm{DH}-\mathrm{DG}=y\cos\theta-x\cos\theta=(y-x)\cos\theta$$

これより，長方形 EFGH の面積は，$\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EH}=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$ となり，

$$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$$

(ii)　$y>2x$ のとき　点 H は平行四辺形 ABCD の外部にある。

辺 BC と線分 DH の交点を J とおくと，

$$\mathrm{IH}=\mathrm{AH}-2\mathrm{AE}=y\sin\theta-2x\sin\theta=(y-2x)\sin\theta$$

$$\mathrm{JH}=\mathrm{DH}-2\mathrm{DG}=y\cos\theta-2x\cos\theta=(y-2x)\cos\theta$$

これより，$\triangle\mathrm{IJH}$ の面積は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{IH}\cdot\mathrm{JH}=\dfrac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$ となり，

$$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta-2\cdot\frac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta=x(2y-3x)\sin\theta\cos\theta$$

［解　説］

平行四辺形を題材にした計量問題です。点 H の位置で場合分けをすることが重要ですが，この点は問題文の S の定義や(3)の設問から読み取れます。