1

解答解説のページへ

放物線$C: y = x^2$上を動く 2 点$\mathrm{P}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^2)$を考える。ただし，$s < 0 < t$とする。P を通り, P におけるCの接線と垂直に交わる直線をl_{P}とする。また, Q を通り, Q におけるCの接線と垂直に交わる直線をl_{Q}とする。さらに，l_{Q}はl_{P}と垂直に交わるとする。以下の問いに答えよ。

(1) l_{P}の方程式をsを用いて表せ。

(2) l_{Q}の方程式をsを用いて表せ。

(3) l_{P}とl_{Q}の交点を$\mathrm{R}(x_0,\ y_0)$とする。x_0，y_0をsを用いて表せ。

(4) (3)のy_0が最小となるsの値を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を$a_1=1$，$a_{n+1}=7a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$とする。

(1)　a_nが89桁の整数となるとき，nを求めよ。

(2)　nを(1)で求めたものとする。a_nの1の位の数字を求めよ。

(3)　nを(1)で求めたものとする。a_nの最高位の数字を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間において, 3 点 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(1,\ 1,\ 0)$, $B(1,\ -1,\ 0)$ がある。r を正の実数とし, 点 $P(a,\ b,\ c)$ が条件 $AP = BP = rOP$ を満たしながら動くとする。以下の問いに答えよ。

(1) $r = 1$ のとき, OP が最小になるような a, b, c を求めよ。

(2) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, 内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}$ の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

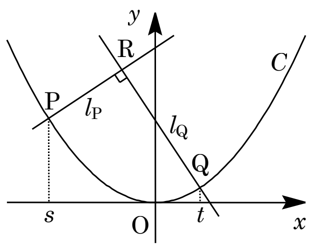
箱の中に, 1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり, 全部で 9 枚入っている。A, B の 2 人ががこの箱から札を無作為に取り出す。A が 2 枚, B が 3 枚取り出すとき, 以下の問いに答えよ。

(1) A がもつ札の数字が同じである確率を求めよ。

(2) A がもつ札の数字のいずれかが, B がもつ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C : y = x^2$ より $y' = 2x$ となり，$\mathrm{P}(s,\ s^2)$ における C の法線 l_{P} の方程式は，その傾きが $-\dfrac{1}{2s}$ から，

$$y - s^2 = -\frac{1}{2s}(x - s),\ y = -\frac{1}{2s}x + s^2 + \frac{1}{2}\ \cdots\cdots\text{①}$$

(2)　$\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における C の法線 l_{Q} の方程式は，①から，

$$y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}\ \cdots\cdots\text{②}$$

l_{P} と l_{Q} は垂直に交わるので $\left(-\dfrac{1}{2s}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2t}\right) = -1$ となり，$t = -\dfrac{1}{4s}$ を②に代入して，

$$y = 2sx + \frac{1}{16s^2} + \frac{1}{2}\ \cdots\cdots\text{③}$$

(3)　①③を連立すると，$-\dfrac{1}{2s}x + s^2 + \dfrac{1}{2} = 2sx + \dfrac{1}{16s^2} + \dfrac{1}{2}$ となり，

$$\left(2s + \frac{1}{2s}\right)x = s^2 - \frac{1}{16s^2},\ 2\left(s + \frac{1}{4s}\right)x = \left(s + \frac{1}{4s}\right)\left(s - \frac{1}{4s}\right)$$

$s < 0$ から $x = \dfrac{s}{2} - \dfrac{1}{8s}$ となり，$y = -\dfrac{1}{2s}\left(\dfrac{s}{2} - \dfrac{1}{8s}\right) + s^2 + \dfrac{1}{2} = s^2 + \dfrac{1}{16s^2} + \dfrac{1}{4}$

よって，l_{P} と l_{Q} の交点 $\mathrm{R}(x_0,\ y_0)$ は，$x_0 = \dfrac{s}{2} - \dfrac{1}{8s}$，$y_0 = s^2 + \dfrac{1}{16s^2} + \dfrac{1}{4}$ である。

(4)　$s^2 > 0$ なので，相加平均と相乗平均の関係から，

$$y_0 = s^2 + \frac{1}{16s^2} + \frac{1}{4} \geqq 2\sqrt{s^2 \cdot \frac{1}{16s^2}} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

等号は $s^2 = \dfrac{1}{16s^2}$ のとき，すなわち $s^4 = \dfrac{1}{16}$ から $s^2 = \dfrac{1}{4}$ となり，さらに $s < 0$ から $s = -\dfrac{1}{2}$ のときに成り立つ。

これより，y_0 が最小となる s の値は $s = -\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

放物線の法線を題材にした基本問題です。(4)も頻出タイプです。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=7a_n$ より $a_n=1\cdot 7^{n-1}=7^{n-1}$ となり，a_n が 89 桁の整数から，

$$10^{88}\leqq 7^{n-1}<10^{89}，\ \log_{10}10^{88}\leqq \log_{10}7^{n-1}<\log_{10}10^{89}$$

すると，$88\leqq (n-1)\log_{10}7<89$ から，$\dfrac{88}{\log_{10}7}\leqq n-1<\dfrac{89}{\log_{10}7}$

ここで，$\log_{10}7=0.8451$ から $104.1<n-1<105.4$ となり，n は整数なので，

$$n-1=105，\ n=106$$

(2)　$a_{106}=7^{105}$ となり，7^{105} の 1 の位の数字を求めるために，以下，mod10 で記すと，

$$7^1\equiv 7，\ 7^2\equiv 9，\ 7^3\equiv 3，\ 7^4\equiv 1，\ 7^5\equiv 7，\ 7^6\equiv 9，\ \cdots\cdots$$

すると，k を 0 以上の整数として，次のように推測できる。

$$7^{4k+1}\equiv 7，\ 7^{4k+2}\equiv 9，\ 7^{4k+3}\equiv 3，\ 7^{4k+4}\equiv 1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，m を自然数として，$7^{m+4}-7^m=(7^4-1)\cdot 7^m=2400\cdot 7^m\equiv 0$ であり，これより $7^{m+4}\equiv 7^m$ となるので，推測$(*)$は成り立っている。

よって，$7^{105}=7^{4\times 26+1}\equiv 7$ から，7^{105} の 1 の位の数字は 7 である。

(3)　$\log_{10}7^{105}=105\log_{10}7=88.7355$ となる。

ここで，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ を用いると，

$$\log_{10}5=\log_{10}10-\log_{10}2=0.6990，\ \log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$$

すると，$88+\log_{10}5<\log_{10}7^{105}<88+\log_{10}6$ となり，$5\cdot 10^{88}<7^{105}<6\cdot 10^{88}$

よって，7^{105} の最高位の数字は 5 である。

［解　説］

等比数列と対数計算の融合問題です。(2)と(3)は，どちらも頻出題です。

3

問題のページへ

(1)　O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ -1,\ 0)$，P$(a,\ b,\ c)$に対して，AP$=$BPより，

$$(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=(a-1)^2+(b+1)^2+c^2\ \cdots\cdots\cdots ①$$

AP$=r$OP $(r>0)$より，$(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=r^2(a^2+b^2+c^2)\cdots\cdots\cdots ②$

$r=1$のとき，①から$b=0$，②から$-2a-2b+2=0$なので$a=1$となり，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{c^2+1}$$

これより，$a=1$，$b=0$，$c=0$のとき, OPは最小になる。

(2)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$のとき，①から$b=0$より，②は$(a-1)^2+1+c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+c^2)$となり，

$$4a^2-8a+8+4c^2=3a^2+3c^2,\ \ c^2=-a^2+8a-8\cdots\cdots\cdots ③$$

$c^2\geqq 0$より$a^2-8a+8\leqq 0$となり，$4-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+2\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots ④$

(3)　(2)のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ 0,\ c)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a-1,\ -1,\ c)$となり，③から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a(a-1)+c^2=a^2-a-a^2+8a-8=7a-8$$

④から$20-14\sqrt{2}\leqq 7a-8\leqq 20+14\sqrt{2}$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$の最大値は$20+14\sqrt{2}$，最小値は$20-14\sqrt{2}$である。

［解　説］

空間の座標に関する基本題です。意味を考えるまでもありませんでした。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　1, 2, 3 の札がそれぞれ 3 枚ずつ入っている箱から, A が 2 枚の札を取り出すとき, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りの場合が同様に確からしいとすると, 取り出した 2 枚の数字が同じであるのは ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2$ 通りとなり, その確率は,

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$$

(2)　A が 2 枚取り出し, 次に B が 3 枚取り出すと考える。

まず, A の札の数字と B の札の数字がすべて異なる場合について考え, (1)の結果を用いると,

(i)　A の札の数字が同じとき

B は A の札の数字以外の 6 枚から 3 枚を取り出すことになり, その確率は,

$$\frac{1}{4}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{4}\times\frac{20}{35}=\frac{20}{140}$$

(ii)　A の札の数字が異なるとき

B は A の札の数字以外の 3 枚から 3 枚を取り出すことになり, その確率は,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{35}=\frac{3}{140}$$

(i)(ii)より, A の札の数字と B の札の数字がすべて異なる確率は,

$$\frac{20}{140}+\frac{3}{140}=\frac{23}{140}$$

したがって, A の札の数字のいずれかが, B の札の数字のいずれかと同じ確率は,

$$1-\frac{23}{140}=\frac{117}{140}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。なお, (2)は余事象の利用がポイントです。