1

解答解説のページへ

1, 2, 3, 4 から等しい確率で数を選ぶ試行を考える。この試行を繰り返すとき，第 n 回目で選んだ数を r_n とおく。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = r_n a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$a_4 = 24$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_5 = 24$ となる確率を求めよ。

(3)　$n \geqq 6$ とし，$a_n = 24$ となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を整数とし，2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ を考える。ただし $a\neq 0$ である。$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c を $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$ を用いて表せ。

(2) $f(x)$ をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

a を実数とする。原点を O とする xy 平面において C を $x^2-4x+y^2-4y-1=0$ で表される円とし，l を $3x-4y+a=0$ で表される直線とする。点 P を円 C の中心とする。以下の問いに答えよ。

(1)　円 C の半径と中心 P の座標を求めよ。

(2)　円 C と直線 l の共有点の個数を求めよ。

(3)　$a>0$ とし，直線 l が円 C と接しているとする。直線 l に関して点 P と対称な点 Q をとる。このとき $\tan\angle\mathrm{POQ}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

s を実数とする。等式

$$f(x)=|x^2-x|-s-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\{f(t)-|t|\}dt$$

を満たす関数 $f(x)$ が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わる s の値の範囲を求めよ。

(3)　s が(2)で求めた範囲にあるとする。$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積 $A(s)$ を求めよ。

(4)　(3)における $A(s)$ の最小値を与える s を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　まず，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ として，$r_n=k$ である確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

ここで，数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_1=1$，$a_{n+1}=r_na_n$ より，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=a_1r_1r_2r_3r_4\cdots r_{n-1}=r_1r_2r_3r_4\cdots r_{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$a_4=24$ なので，$(*)$から $r_1r_2r_3=2^3\cdot 3$ となり，r_1，r_2，r_3 の組合せは，

$$\{r_1,\ r_2,\ r_3\}=\{2,\ 3,\ 4\}$$

すると，その確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times 3!=\dfrac{3}{32}$ である。

(2)　$a_5=24$ なので，$(*)$から $r_1r_2r_3r_4=2^3\cdot 3$ となり，r_1，r_2，r_3，r_4 の組合せは，

$$\{r_1,\ r_2,\ r_3\ \ r_4\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 2,\ 2,\ 3\}$$

すると，その確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\times 4!+\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\times\dfrac{4!}{3!}=\dfrac{6+1}{4^3}=\dfrac{7}{64}$ である。

(3)　$n\geqq 6$ のとき，$a_n=24$ なので，$(*)$から $r_1r_2r_3r_4\cdots r_{n-1}=2^3\cdot 3$

そこで，r_1，r_2，r_3，r_4，$\cdots$，r_{n-1} の組合せを考えて，その確率を求めると，

(i)　$\{r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ \cdots,\ r_{n-1}\}=\{1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$のとき

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{(n-1)!}{(n-4)!}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4^{n-1}}$$

(ii)　$\{r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ \cdots,\ r_{n-1}\}=\{1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3\}$のとき

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{(n-1)!}{(n-5)!\cdot 3!}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6\cdot 4^{n-1}}$$

(i)(ii)より，$a_n=24$ となる確率は，

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4^{n-1}}\left(1+\frac{n-4}{6}\right)=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n+2)}{6\cdot 4^{n-1}}$$

［解　説］

漸化式と確率の融合問題です。いきなり一般項である$(*)$の式を示しましたが，(1)(2)の誘導をもとに考えても構いません。

2

問題のページへ

(1)　a, b, c を整数とする 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ に対して，

$$f(1)=a+b+c\cdots\cdots①,\ f(-1)=a-b+c\cdots\cdots②,\ f(0)=c\cdots\cdots③$$

③より $c=f(0)$ となり，①②に代入すると，

$$a+b=f(1)-f(0),\ a-b=f(-1)-f(0)$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}\{f(1)+f(-1)-2f(0)\}$，$b=\dfrac{1}{2}\{f(1)-f(-1)\}$ となる。

(2)　条件より，$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ なので，③から，

$$|c|=|f(0)|\leqq 1,\ c=0,\ \pm 1$$

さらに，$|f(1)|\leqq 1$，$|f(-1)|\leqq 1$ から，(1)の結果を利用して，

$$|a|=\frac{1}{2}|f(1)+f(-1)-2f(0)|\leqq\frac{1}{2}(|f(1)|+|f(-1)|+2|-f(0)|)=2$$

$$|b|=\frac{1}{2}|f(1)-f(-1)|\leqq\frac{1}{2}(|f(1)|+|-f(-1)|)=1$$

すると，$a\neq 0$ から $a=\pm 1,\ \pm 2$ となり，また $b=0,\ \pm 1$ である。

さて，$|x|\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とおくと，

(i)　$a=1$ のとき　$f(x)=x^2+bx+c$ に対して，

(i-i)　$b=0$ のとき　$f(x)=x^2+c$

$M=f(\pm 1)=1+c\leqq 1$，$m=f(0)=c\geqq -1$ から，$c=0,\ -1$ である。

(i-ii)　$b=1$ のとき　$f(x)=x^2+x+c=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+c-\dfrac{1}{4}$

$M=f(1)=2+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{4}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(i-iii)　$b=-1$ のとき　$f(x)=x^2-x+c=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+c-\dfrac{1}{4}$

$M=f(-1)=2+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{4}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(ii)　$a=-1$ のとき　$f(x)=-x^2+bx+c$ に対して，

(i)と同様にすると，条件に適するのは，$(b,\ c)=(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のときである。

(iii)　$a=2$ のとき　$f(x)=2x^2+bx+c$ に対して，

(iii-i)　$b=0$ のとき　$f(x)=2x^2+c$

$M=f(\pm 1)=2+c\leqq 1$，$m=f(0)=c\geqq -1$ から，$c=-1$ である。

(iii-ii)　$b=1$ のとき　$f(x)=2x^2+x+c=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+c-\dfrac{1}{8}$

$M=f(1)=3+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{8}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(iii-iii)　$b=-1$ のとき　$f(x)=2x^2-x+c=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+c-\dfrac{1}{8}$

$M=f(-1)=3+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{8}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(iv) $a=-2$ のとき　$f(x)=-2x^2+bx+c$ に対して，

(iii)と同様にすると，条件に適するのは，$(b,\ c)=(0,\ 1)$ のときである。

(i)～(iv)より，条件に適する $f(x)$ は，

$$f(x)=\pm x^2,\ \pm(x^2-1),\ \pm(2x^2-1)$$

［解 説］

2 次関数の決定問題です。(1)を誘導として利用するわけですが，ポイントは三角不等式を用いた絶対値の処理です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) 円 $C: x^2-4x+y^2-4y-1=0$ に対して，$(x-2)^2+(y-2)^2=3^2$

すると，円 C は，中心 P の座標が P$(2,\ 2)$，半径が 3 である。

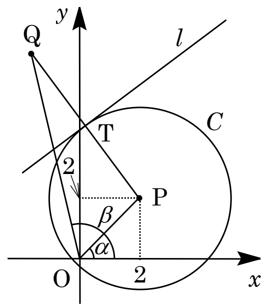
(2) 円 C の中心 P と直線 $l: 3x-4y+a=0$ の距離は，$\dfrac{|3\cdot 2-4\cdot 2+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|a-2|}{5}$

(i) $\dfrac{|a-2|}{5}<3\ (-13<a<17)$ のとき　C と l の共有点の個数は 2 となる。

(ii) $\dfrac{|a-2|}{5}=3\ (a=-13,\ 17)$ のとき　C と l の共有点の個数は 1 となる。

(iii) $\dfrac{|a-2|}{5}>3\ (a<-13,\ 17<a)$ のとき　C と l の共有点の個数は 0 となる。

(3) l が C と接している $a>0$ の場合は，(2)から $a=17$ であり，このとき接点を T，l に関して P と対称な点を Q とする。



$\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ と同じ向きの l の法線ベクトルを $\vec{n}=(-3,\ 4)$ とすると，$|\vec{n}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=3\cdot\frac{1}{5}(-3,\ 4)=\left(-\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{PT}}=2\left(-\dfrac{9}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)=\left(-\dfrac{18}{5},\ \dfrac{24}{5}\right)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2,\ 2)+\left(-\frac{18}{5},\ \frac{24}{5}\right)=\left(-\frac{8}{5},\ \frac{34}{5}\right)$$

さて，線分 OP, OQ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とおくと，

$$\tan\alpha=1,\ \tan\beta=-\frac{34}{8}=-\frac{17}{4}$$

これより，$\tan\angle\mathrm{POQ}=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{-\dfrac{17}{4}-1}{1-\dfrac{17}{4}}=\dfrac{21}{13}$

［解　説］

円と直線の関係についての問題です。(3)は式計算で処理も可能ですが，解答例では計算量を少なくするためにベクトルを利用しました。

4

問題のページへ

(1)　等式 $f(x)=|x^2-x|-s-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\{f(t)-|t|\}dt$ に対して，$C=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{f(t)-|t|\}dt$ とおくと，$f(x)=|x^2-x|-s-Cx$ となり，

$$C=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{|t^2-t|-s-Ct-|t|\}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(|t^2-t|-|t|)dt-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(s+Ct)dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(t^2-t+t)dt+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-t^2+t-t)dt-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}s\,dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}t^2dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^2dt-2s\cdot\frac{1}{2}=-s$$

よって，$f(x)=|x^2-x|-s+sx$ である。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，$f(x)=0$ の実数解の個数が対応し，

$$|x^2-x|-s+sx=0,\ s(x-1)=-|x(x-1)|\cdots\cdots\cdots①$$

まず，$x=1$ は①の解であり，$x\neq1$ のときについて，①から，

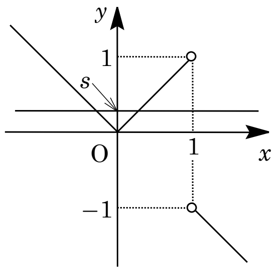
$$s=-\frac{|x(x-1)|}{x-1}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g(x)=-\dfrac{|x(x-1)|}{x-1}\ (x\neq1)$ とおくと，

(i)　$x(x-1)\geqq0\ (x\leqq0,\ 1<x)$ のとき　$g(x)=-\dfrac{x(x-1)}{x-1}=-x$

(ii)　$x(x-1)<0\ (0<x<1)$ のとき　$g(x)=\dfrac{x(x-1)}{x-1}=x$

これより，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。



すると，$y=f(x)$ のグラフと x 軸が 3 点で交わる，すなわち①が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，②が $x\neq1$ の異なる 2 個の実数解をもつ条件に対応するので，右図より，

$$0<s<1$$

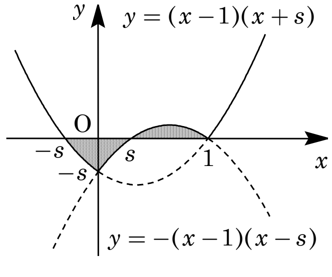
(3)　$0<s<1$ のとき，$f(x)=|x^2-x|-s+sx$ に対して，

(i)　$x^2-x\geqq0\ (x\leqq0,\ 1\leqq x)$ のとき

$$f(x)=x^2-x-s+sx=(x-1)(x+s)$$

(ii)　$x^2-x<0\ (0<x<1)$ のとき

$$f(x)=-x^2+x-s+sx=-(x-1)(x-s)$$



すると，$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部のようになり，このグラフと x 軸で囲まれる部分の面積を $A(s)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
A(s) &= \int_{-s}^{1} -(x-1)(x+s)\,dx + 2\int_{s}^{1} -(x-1)(x-s)\,dx \\
&\quad -\int_{0}^{1} \{-(x-1)(x-s)-(x-1)(x+s)\}\,dx \\
&= -\left(-\frac{1}{6}\right)(1+s)^3 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)(1-s)^3 + \int_{0}^{1} 2x(x-1)\,dx \\
&= \frac{1}{6}(1+s)^3 + \frac{1}{3}(1-s)^3 + 2\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3 = -\frac{1}{6}s^3 + \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

(4)　(3)から，$A'(s) = -\frac{1}{2}s^2 + 3s - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(s^2 - 6s + 1)$

すると，$0 < s < 1$ における $A'(s) = 0$ の解は $s = 3 - 2\sqrt{2}$ から，$A(s)$ の増減は右表のようになる。これより，$s = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき，$A(s)$ は最小値をとる。

s	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$A'(s)$		$-$	0	$+$	
$A(s)$		↘		↗	

［解 説］

置換え型の積分方程式を端緒にした微積分の総合問題です。量的には多めです。(2)では，常套手段の定数分離をしても，ややこしい関数が現れなかったので，そのまま進めました。また，(3)では計算ミスを避けるために，公式処理をしています。