

1

解答解説のページへ

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(t, f(t))$ における接線を L とする。ただし $0 < t < 1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B の座標を t を用いて表せ。
- (2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

角 α は $0 \leq \alpha \leq \pi$ を満たし、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ とする。角 θ は $\alpha \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くものとする。 $f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2$ とおく。また、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。
- (2) t の値の範囲を求めよ。
- (3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。
- (4) $f(\theta)$ の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

k を実数とし、 x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。
- (2) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち、 α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

xyz 空間内に 3 点 $A(2, 0, 1)$, $B(0, 3, -1)$, $C(0, 3, -3)$ がある。線分 BC 上の点を $P(0, 3, s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし, t は $0 < t < 1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし, 球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1 , 球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 球面 K の方程式を求めよ。
- (2) S_1 を s と t の式で表せ。
- (3) 点 P は線分 BC 上で固定し, 点 Q は線分 AP 上を動くものとする。 $S_1 + S_2$ が最大値をとる t を s の式で表せ。
- (4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに $S_1 + S_2$ が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) $f(x) = x^3 - 3x$ に対して, $C: y = f(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$ 上の点 $A(t, f(t))$ における接線 L の方程式は, $f'(x) = 3x^2 - 3$ より,

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t), \quad y = (3t^2 - 3)x - 2t^3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②を連立すると, $x^3 - 3x = (3t^2 - 3)x - 2t^3$ となり,

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0, \quad (x - t)^2(x + 2t) = 0$$

すると, A 以外の共有点 B の x 座標は $x = -2t$ より, $B(-2t, -8t^3 + 6t)$ となる。

- (2) 2点 A, B の y 座標の差の絶対値を d とおくと,

$$d = |t^3 - 3t - (-8t^3 + 6t)| = |9t^3 - 9t| = 9|t(t+1)(t-1)|$$

$0 < t < 1$ より, $t(t+1)(t-1) < 0$ となり,

$$d = -9(t^3 - t)$$

すると, $d' = -9(3t^2 - 1)$ から, $0 < t < 1$ にお

ける d の増減は右表のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
d'		+	0	-	
d		↗		↘	

よって, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき d は最大となる。

[解説]

微分の応用についての基本事項の確認問題です。

2

問題のページへ

(1) $0 \leq \alpha \leq \pi$ のとき, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ から $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ となるので,

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ に対して, $\alpha \leq \theta \leq \pi$ より,

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\cos \frac{\pi}{2} < \cos \alpha < \cos \frac{\pi}{4}$ となり, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ から,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $\sin \frac{5}{4}\pi \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ となり, (1)から,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad -1 \leq \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

よって, $-1 \leq t \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdots \cdots \textcircled{3}$ である。

(3) $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1 = t^2 - 1$ より,

$$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2 = (t^2 - 1) - t + 2 = t^2 - t + 1$$

(4) (3)より, $f(\theta)$ を, $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ と変形すると, $t = \frac{1}{2}$ は③を満たす。

よって, $f(\theta)$ は, $t = \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。

[解説]

基本的な三角関数の計算問題です。

3

問題のページへ

- (1) 実数 k に対し、2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ が虚数解をもつ条件は、

$$D = k^2 - 4(3k - 4) < 0, \quad k^2 - 12k + 16 < 0$$

よって、 $6 - 2\sqrt{5} < k < 6 + 2\sqrt{5} \cdots \cdots \textcircled{2}$

- (2) まず、 x^4 を $x^2 - kx + 3k - 4$ で割り、余りを $r(x)$ とおくと、

$$x^4 = (x^2 - kx + 3k - 4)(x^2 + kx + k^2 - 3k + 4) + r(x)$$

$$\text{ただし、} r(x) = (k^3 - 6k^2 + 8k)x - (3k - 4)(k^2 - 3k + 4)$$

さて、 $\textcircled{1}$ の虚数解 α に対し、 $\alpha^2 - k\alpha + 3k - 4 = 0$ であることに注意すると、

$$\alpha^4 = r(\alpha) = (k^3 - 6k^2 + 8k)\alpha - (3k - 4)(k^2 - 3k + 4)$$

すると、 α^4 が実数となる条件は、 k が実数であることより、

$$k^3 - 6k^2 + 8k = 0, \quad k(k - 2)(k - 4) = 0$$

よって、求める k の値は、 $\textcircled{2}$ より、 $k = 2, 4$ である。

[解説]

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは、整式の除法の計算だけです。

4

問題のページへ

- (1) 点 $A(2, 0, 1)$, $B(0, 3, -1)$, $C(0, 3, -3)$, および線分 BC 上の点 $P(0, 3, s)$ ($-3 \leq s \leq -1$) に対して, 線分 AP を $t:(1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点 Q の座標は, $Q(2-2t, 3t, st-t+1)$ となる。

このとき, 点 Q を中心とする半径 3 の球面 K の方程式は,

$$\{x-(2-2t)\}^2 + \{y-3t\}^2 + \{z-(st-t+1)\}^2 = 9 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (2) K と xy 平面が交わってできる円は, ①に $z=0$ を代入して,

$$\{x-(2-2t)\}^2 + \{y-3t\}^2 = 9-(st-t+1)^2 \quad \text{かつ} \quad z=0$$

すると, その面積 S_1 は, $S_1 = \pi\{9-(st-t+1)^2\} \cdots \cdots \textcircled{2}$

- (3) K と yz 平面が交わってできる円は, ①に $x=0$ を代入して,

$$\{y-3t\}^2 + \{z-(st-t+1)\}^2 = 9-(2-2t)^2 \quad \text{かつ} \quad x=0$$

すると, その面積 S_2 は, $S_2 = \pi\{9-(2-2t)^2\} \cdots \cdots \textcircled{3}$

さて, $S = S_1 + S_2$ とおくと, ②③より,

$$S = \pi\{9-(st-t+1)^2 + 9-(2-2t)^2\} = \pi\{18-(st-t+1)^2 - (2-2t)^2\}$$

ここで, 点 P を線分 BC 上で固定し, 点 Q は線分 AP 上を動かすという条件を, s を $s = s_0$ ($-3 \leq s_0 \leq -1$) と固定し, t を $0 < t < 1$ で動かすと考えて,

$$S = \pi\{18 - f(t)\}, \quad f(t) = (s_0 t - t + 1)^2 + (2 - 2t)^2$$

すると, S が最大値をとるとき, $f(t)$ は最小となることより,

$$\begin{aligned} f(t) &= (s_0 - 1)^2 t^2 + 2(s_0 - 1)t + 1 + 4t^2 - 8t + 4 \\ &= \{(s_0 - 1)^2 + 4\}t^2 + 2(s_0 - 5)t + 5 \\ &= \{(s_0 - 1)^2 + 4\} \left\{ t + \frac{s_0 - 5}{(s_0 - 1)^2 + 4} \right\}^2 - \frac{(s_0 - 5)^2}{(s_0 - 1)^2 + 4} + 5 \end{aligned}$$

ここで, $-3 \leq s_0 \leq -1$ より, $-\frac{s_0 - 5}{(s_0 - 1)^2 + 4} > 0$ となり,

$$-\frac{s_0 - 5}{(s_0 - 1)^2 + 4} - 1 = \frac{-s_0^2 + s_0}{(s_0 - 1)^2 + 4} = \frac{-s_0(s_0 - 1)}{(s_0 - 1)^2 + 4} < 0$$

よって, $0 < -\frac{s_0 - 5}{(s_0 - 1)^2 + 4} < 1$ となり, $f(t)$ は $t = -\frac{s_0 - 5}{(s_0 - 1)^2 + 4}$ で最小となる。

すなわち, S が最大値をとるのは, $t = -\frac{s - 5}{(s - 1)^2 + 4}$ のときである。

- (4) 点 Q が線分 AP の中点, すなわち $t = \frac{1}{2}$ のとき S は最大値をとるので,

$$\frac{1}{2} = -\frac{s - 5}{(s - 1)^2 + 4}, \quad s^2 - 2s + 5 = -2s + 10$$

すると, $s^2 = 5$ となり, $-3 \leq s \leq -1$ から, $s = -\sqrt{5}$ となる。

[解説]

空間図形を題材とした複雑そうな問題設定ですが、内容は基本的です。最もエネルギーが必要なのは、平方完成をして軸の位置のチェックの箇所ですので。