1

解答例のページへ

座標平面上の原点を O とし，1 点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ をとる。ただし，$a>0$ とする。また，放物線 $y=x^2$ 上に点 B をとる。ただし，B は原点以外の点とする。次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が垂直になるときの点 B の座標を a を用いて表せ。また，そのときの三角形 OAB の面積 S を a を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が最大になるときの点 B の座標を a を用いて表せ。また，そのときの三角形 OAB の面積 T を a を用いて表せ。

(3) S と T は，(1)と(2)で求めたものとする。$S=3T$ となるときの点 A の座標を求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　自然数 n に対して，$\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}=\alpha^n$，$\beta^{n+2}-\beta^{n+1}=\beta^n$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。自然数 n に対して，$b_{n+1}=a_n$ が成り立つことを示せ。

(4)　自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}-3$ が成り立つことを示せ。

(5)　a_9 を求めよ。

3

解答例のページへ

1 個のさいころを 4 回続けて投げ，出る目の数を順に a, b, c, d とする。なお，さいころは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c<d$ となる確率を求めよ。

(2)　$a+b+c+d=8$ となる確率を求めよ。

(3)　$a(b+1)(c+2)(d+3)$ が偶数になる確率を求めよ。

(4)　$(a-b)(b-c)(c-d)=0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

a は $0<a<3$ を満たす実数とする。放物線 $y=-x^2+9$ と直線 $y=a(x+3)$ で囲まれる部分の面積を S, 放物線 $y=-x^2+9$ と 2 つの直線 $y=a(x+3)$，$x=3$ で囲まれる部分の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a を用いて表せ。必要ならば, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いてよい。

(2) $S+T$ を a を用いて表せ。

(3) $S+T$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$，放物線 $y=x^2$ 上の原点 O 以外の点 $\mathrm{B}(t,\ t^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(t,\ t^2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から $at-t^2=0$ となり，$t\neq 0$ より $t=a$ である。

このとき $\mathrm{B}(a,\ a^2)$ より，△OAB の面積 S は，$a>0$ から，

$$S=\frac{1}{2}\left|a\cdot a^2-(-1)\cdot a\right|=\frac{1}{2}\left|a^3+a\right|=\frac{1}{2}a(a^2+1)$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=at-t^2=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$ から，内積の値は $t=\frac{a}{2}$ のとき最大になる。

このとき $\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}\right)$ より，△OAB の面積 T は，$a>0$ から，

$$T=\frac{1}{2}\left|a\cdot\frac{a^2}{4}-(-1)\cdot\frac{a}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{a^3}{4}+\frac{a}{2}\right|=\frac{1}{8}a(a^2+2)$$

(3)　$S=3T$ より，$\frac{1}{2}a(a^2+1)=\frac{3}{8}a(a^2+2)$ となり，$a>0$ から，

$$4(a^2+1)=3(a^2+2),\ a^2=2$$

したがって，$a=\sqrt{2}$ から，$\mathrm{A}(\sqrt{2},\ -1)$ となる。

［コメント］

ベクトルについての基本題です。なお，三角形の面積は公式処理をしています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対し，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$

ここで，$a_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくと，$a_1=\alpha^1+\beta^1=1$ となり，

$$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+2=3$$

$$a_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1+3=4$$

$$a_4=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=9-2=7$$

(2)　α，β は $x^2-x-1=0$ の解なので，$\alpha^2-\alpha-1=0$，$\beta^2-\beta-1=0$

すると，$\alpha^2-\alpha=1$ から，両辺に α^n をかけると $\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}=\alpha^n$ ………①

また，$\beta^2-\beta=1$ から，両辺に β^n をかけると，$\beta^{n+2}-\beta^{n+1}=\beta^n$ ………②

(3)　①②から，$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}-(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})=\alpha^n+\beta^n$ となり，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_n \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，③から，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$ ………④

(4)　④から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_{k+1})$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_{k+1})=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+2}-a_2$$

(1)から $a_2=3$ なので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}-3$ が成り立つ。

(5)　(4)から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}a_k=a_9-3$ となり，$a_9=3+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)$

③から，$a_5=a_4+a_3=11$，$a_6=a_5+a_4=18$，$a_7=a_6+a_5=29$ となり，

$$a_9=3+(1+3+4+7+11+18+29)=76$$

［コメント］

漸化式についての基本題です。非常に細かな誘導が付いています。

3

問題のページへ

さいころを 4 回続けて投げ，出る目の数を順に a, b, c, d とする。

(1)　$a<b<c<d$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ は ${}_6\mathrm{C}_4=15$ 通りあり，その確率は，

$$\frac{15}{6^4}=\frac{5}{432}$$

(2)　$a+b+c+d=8$ となる $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ は，

$$\{1,\ 1,\ 1,\ 5\},\ \{1,\ 1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 1,\ 3,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 2,\ 3\},\ \{2,\ 2,\ 2,\ 2\}$$

これより，$a+b+c+d=8$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ は，

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+1=4+12+6+12+1=35\ （通り）$$

したがって，その確率は $\dfrac{35}{6^4}=\dfrac{35}{1296}$ である。

(3)　$a(b+1)(c+2)(d+3)$ が奇数になるのは，a，$b+1$，$c+2$，$d+3$ が奇数より，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(奇数,\ 偶数,\ 奇数,\ 偶数)$$

$(a,\ b,\ c,\ d)$ は 3^4 通りあるので，$a(b+1)(c+2)(d+3)$ が偶数になる確率は，

$$1-\frac{3^4}{6^4}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

(4)　$(a-b)(b-c)(c-d)\neq 0$ となるのは，$b\neq a$ かつ $c\neq b$ かつ $d\neq c$ のときなので，$(a,\ b,\ c,\ d)$ は $6\cdot 5^3$ 通りある。すると，$(a-b)(b-c)(c-d)=0$ となる確率は，

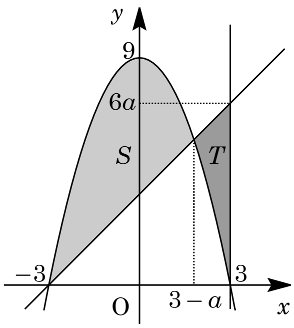
$$1-\frac{6\cdot 5^3}{6^4}=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

［コメント］

頻出タイプの確率問題です。(3)と(4)は余事象を利用しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　放物線 $y=-x^2+9$ ……①と，$0<a<3$ のとき直線 $y=a(x+3)$ ……②で囲まれる部分の面積を S, 放物線①と直線②と直線 $x=3$ ……③で囲まれる部分の面積を T とする。まず, ①②を連立して, $-x^2+9=a(x+3)$ から,

$$-(x+3)(x-3)-a(x+3)=0$$

$(x+3)(x-3+a)=0$ より, $x=-3,\ 3-a$ となり,

$$S=\int_{-3}^{3-a}\{-x^2+9-a(x+3)\}dx$$

$$=-\int_{-3}^{3-a}(x+3)(x-3+a)dx=\frac{1}{6}(3-a+3)^3=\frac{1}{6}(6-a)^3 \cdots\cdots④$$

(2)　②③を連立すると, $(x,\ y)=(3,\ 6a)$ となるので,

$$T=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6a-\left\{\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx-S\right\}=18a+\int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)dx+S$$

$$=18a-\frac{1}{6}(3+3)^3+S=18a-36+S$$

すると, $S+T=S+(18a-36+S)=2S+18a-36$ となり, ④から,

$$S+T=\frac{1}{3}(6-a)^3+18a-36=-\frac{1}{3}a^3+6a^2-18a+36$$

(3)　$f(a)=S+T=-\frac{1}{3}a^3+6a^2-18a+36$ とおくと,

$$f'(a)=-a^2+12a-18$$

$0<a<3$ における $f'(a)=0$ の解は $a=6-3\sqrt{2}$ となり, これより $f(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$6-3\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

したがって, $f(a)=S+T$ は $a=6-3\sqrt{2}$ のとき最小となり, 最小値は,

$$f(6-3\sqrt{2})=\frac{1}{3}(6-6+3\sqrt{2})^3+18(6-3\sqrt{2})-36=72-36\sqrt{2}$$

［コメント］

微積分の総合問題です。(2)では, 積分計算して直接的に T を求めるかわりに, 問題文で与えられた公式利用という工夫を行っています。