1

解答解説のページへ

a は $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす定数とする。点 A を $(a,\ 0)$，点 B を $(a,\ a^2)$，点 C を $(-1,\ 1)$，点 D を $(-1,\ 0)$ とし，曲線 E を $y=x^2$ とする。線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S とし，線分 AB，曲線 E，線分 CD，線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S と T が等しくなるときの a の値を求めよ。

(2) S と T の差が最大となるときの a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A=\{x\mid x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0\}$$
$$B=\{x\mid x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0\}$$

次の問いに答えよ。

(1)　$k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2)　集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3)　集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。

$\boxed{4}$
解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の数とし，座標平面上の曲線 $C_1 : y = e^{ax}$，$C_2 : y = \sqrt{2x-b}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x-b}$ の導関数を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3)　(2)において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，$w=-\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z\neq -1)$ とする。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $z=i$ のときの w の実部と虚部を求めよ。

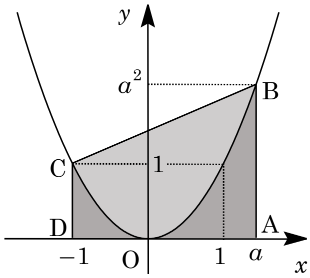
(2) z を w を用いて表せ。

(3) 点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) $|w|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$1 \leqq a \leqq 4$ のとき，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(a,\ a^2)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1)$，$\mathrm{D}(-1,\ 0)$，曲線 $E: y = x^2$ に対して，線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S, 線分 AB, 曲線 E, 線分 CD, 線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。

このとき，台形 ABCD の面積が $S+T$ になり，

$$S+T=\frac{1}{2}(a^2+1)(a+1)$$

また，直線 BC の方程式を $y=mx+n$ とおくと，

$$S=\int_{-1}^{a}(mx+n-x^2)dx=-\int_{-1}^{a}(x+1)(x-a)dx=\frac{1}{6}(a+1)^3$$

さて，$S=T$ より $2S=S+T$ となるので，$2\cdot\frac{1}{6}(a+1)^3=\frac{1}{2}(a^2+1)(a+1)$ から，

$$(a+1)\{2(a+1)^2-3(a^2+1)\}=0,\ -(a+1)(a^2-4a+1)=0$$

$1 \leqq a \leqq 4$ より，$a=2+\sqrt{3}$ である。

(2)　S と T の差は $|S-T|$ と表され，$S-T=2S-(S+T)$ から，

$$S-T=2\cdot\frac{1}{6}(a+1)^3-\frac{1}{2}(a^2+1)(a+1)=-\frac{1}{6}(a+1)(a^2-4a+1)$$

ここで，$1 \leqq a \leqq 4$ において，$f(a)=-\frac{1}{6}(a+1)(a^2-4a+1)$ とおくと，

$$f'(a)=-\frac{1}{6}(a^2-4a+1)-\frac{1}{6}(a+1)(2a-4)=-\frac{1}{2}(a^2-2a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$\left|\frac{2+2\sqrt{2}}{3}\right|>\left|-\frac{5}{6}\right|$ より，$|S-T|=|f(a)|$ が最大となる a の値は $a=1+\sqrt{2}$ である。

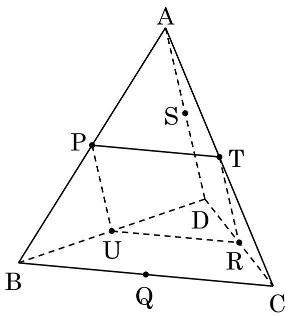
a	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$	4
$f'(a)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(a)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{6}$

［解　説］

定積分と面積についての基本題です。なお, T を直接求めても構いません。

2

問題のページへ



(1)　1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，右図のように各辺の中点を P, Q, R, S, T, U とすると，中点連結定理より，$\mathrm{PT}=\mathrm{TR}=\mathrm{RU}=\mathrm{UP}=1$ となる。

ここで，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，

$$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})\cdot\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{4}(2-2)=0$ から，四角形 PTRU は 1 辺の長さが 1 の正方形であり，その対角線 PR の長さは $\sqrt{2}$ である。

(2)　$\mathrm{BS}=\mathrm{BR}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\mathrm{RS}=1$ から，$\triangle\mathrm{BRS}$ に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{SBR}=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-1^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5}{6}$$

(3)　正方形 PTRU の対角線の交点を H とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\right\}-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}}=-\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})\cdot\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=-\frac{1}{8}(2-4+4-2-2+2)=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}=-\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})\cdot\frac{1}{2}\vec{d}=-\frac{1}{8}(2+2-4)=0$$

これより，線分 PH は正方形 PTRU に垂直であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|^2=\frac{1}{16}(4+4+4+2\cdot2-2\cdot2-2\cdot2)=\frac{1}{2},\quad|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，四角錐 Q-PTRU の体積 V は，$V=\frac{1}{3}\cdot1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ である。

［解 説］

正四面体を題材にした空間ベクトルの応用問題です。各設問とも，いろいろな解法が考えられます。ただ，その要は，対称性に着目することですが。

3　　問題のページへ

(1)　まず，$x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0$ に対して，

$$x^2(x-1)-(k^2+4k+4)(x-1)=0,\ (x-1)\{x^2-(k+2)^2\}=0$$

$$(x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0$$

また，$x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0$ に対して，

$$x^2\{x-(k^2+3k+3)\}+k^2\{x-(k^2+3k+3)\}=0$$

$$(x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0$$

したがって，$A=\{x\,|\,(x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0\}$………①

$B=\{x\,|\,(x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0\}$………②

さて，$k=-1$ のとき，①から，$A=\{x\,|\,(x-1)^2(x+1)=0\}=\{-1,\ 1\}$

②から，$B=\{x\,|\,(x^2+1)(x-1)=0\}=\{1\}$ となり，

$A\cap B=\{1\}$，$A\cup B=\{-1,\ 1\}$

(2)　B の要素の個数について，②より $k=0$ のときは 2 個，$k\neq0$ のときは 1 個である。

ここで，B が A の部分集合となるのは，

(i)　$k=0$ のとき　$A=\{-2,\ 1,\ 2\}$，$B=\{0,\ 3\}$ なので，$B\subset A$ でない。

(ii)　$k\neq0$ のとき　$B=\{k^2+3k+3\}$ から，B が A の部分集合となる必要条件は，

①から，$k^2+3k+3=1$ または $k^2+3k+3=-k-2$ または $k^2+3k+3=k+2$

(ii-i)　$k^2+3k+3=1$ のとき　$(k+1)(k+2)=0$ から，$k=-1,\ -2$，

・$k=-1$ のとき　(1)より $B\subset A$ である。

・$k=-2$ のとき　$A=\{0,\ 1\}$，$B=\{1\}$ より，$B\subset A$ である。

(ii-ii)　$k^2+3k+3=-k-2$ のとき　$k^2+4k+5=0$ から，実数 k は存在しない。

(ii-iii)　$k^2+3k+3=k+2$ のとき　$(k+1)^2=0$ から $k=-1$ なので $B\subset A$ である。

(i)(ii)より，B が A の部分集合となるのは，$k=-1,\ -2$ のときである。

(3)　A の要素の個数について，①より，2 個となるのは，$1=-k-2\ (k=-3)$ のとき，$1=k+2\ (k=-1)$ のとき，$-k-2=k+2\ (k=-2)$ のときである。また，1 個だけとなるときはなく，$k\neq-3,\ -2,\ -1$ のときは 3 個である。

すると，$A\cup B$ の要素の個数を N とおくと，

(i)　$k=0$ のとき　(2)より $A\cup B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ なので $N=5$

(ii)　$k=-1$ のとき　(1)より $A\cup B=\{-1,\ 1\}$ なので $N=2$

(iii)　$k=-2$ のとき　(2)より $A\cup B=\{0,\ 1\}$ なので $N=2$

(iv)　$k=-3$ のとき　$A=\{-1,\ 1\}$，$B=\{3\}$ から $A\cup B=\{-1,\ 1,\ 3\}$ より $N=3$

(v)　$k\neq-3,\ -2,\ -1,\ 0$ のとき　$A=\{1,\ -k-2,\ k+2\}$，$B=\{k^2+3k+3\}$

$A\cup B=\{1,\ -k-2,\ k+2,\ k^2+3k+3\}$ より $N=4$

(i)～(v)より，$A\cup B$の要素の個数は,

$k=-1,\ -2$のとき 2 個，$k=-3$のとき 3 個，$k=0$のとき 5 個

$k\neq-3,\ -2,\ -1,\ 0$のとき 4 個

［解 説］

集合を題材とした問題です。内容的には場合分けの方法が問われており，慎重な処理が要求されます。なお，冒頭の 2 つの 3 次方程式の因数分解については，係数に着目した方法を採っています。

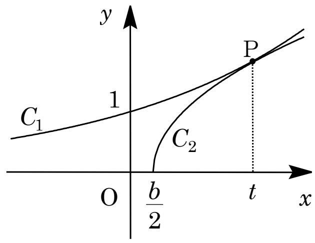
4

問題のページへ

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$y=e^{ax}$ ……①に対して，$y'=ae^{ax}$

また，$y=\sqrt{2x-b}=(2x-b)^{\frac{1}{2}}$ ……②に対して，$y'=\dfrac{1}{2}(2x-b)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x-b}}$

(2) 曲線 $C_1 : y=e^{ax}$ と $C_2 : y=\sqrt{2x-b}$ が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとき，点 P の x 座標を $x=t$ とおくと，(1)から，



$$ae^{at}=\frac{1}{\sqrt{2t-b}}\ \cdots\cdots①,\quad e^{at}=\sqrt{2t-b}\ \cdots\cdots②$$

①②より，$ae^{at}=\dfrac{1}{e^{at}}$ から $(e^{at})^2=\dfrac{1}{a}$ となり，

$$e^{at}=\frac{1}{\sqrt{a}},\quad t=\frac{1}{a}\log\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2a}\log a$$

すると，$\mathrm{P}(t,\ e^{at})$ から $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2a}\log a,\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ であり，②から $2t-b=(e^{at})^2$ なので，

$$b=2t-(e^{at})^2=-\frac{1}{a}\log a-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a}(1+\log a)$$

(3)　(2)のとき，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_0^t e^{ax}dx-\int_{\frac{b}{2}}^t\sqrt{2x-b}\,dx=\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^t-\left[\frac{2}{3}(2x-b)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right]_{\frac{b}{2}}^t$$

$$=\frac{1}{a}(e^{at}-1)-\frac{1}{3}(2t-b)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)-\frac{1}{3a\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{3a}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-3\right)$$

［解　説］

2 曲線が接する条件を問う頻出問題です。なお，計算は穏やかです。

5

問題のページへ

(1)　$z=i$ のとき，$w=-\dfrac{2(2i-i)}{i+1}=-\dfrac{2i}{1+i}=-\dfrac{2i(1-i)}{2}=-1-i$

これより，w の実部は -1，虚部は -1 となる。

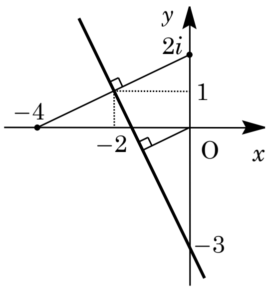
(2)　$w=-\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z\neq-1)$ より $w(z+1)=-4z+2i$ となり，$(w+4)z=-(w-2i)$

$w=-4$ のとき成り立たないので，$w\neq-4$ において $z=-\dfrac{w-2i}{w+4}$ ………①

(3)　点 z は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くことより，$|z|=1$ ………②

①を②に代入して $\left|-\dfrac{w-2i}{w+4}\right|=1$ となり，$\dfrac{|w-2i|}{|w+4|}=1$ から，

$|w-2i|=|w+4|$　$(w\neq-4)$



すると，点 w は点 $2i$ と点 -4 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。図示すると，右図の太い直線となる。

(4)　(3)の点 w の描く図形について，$w=x+yi$ とおくと，

$y-1=-2(x+2)$，$2x+y+3=0$ ………③

すると，$|w|$ の最小値は原点と直線③の距離になり，$\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt5}$ である。

そして，このときの w は，$|-4-2i|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt5$ から，

$$w=\frac{3}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{2\sqrt5}(-4-2i)=\frac{3}{10}(-4-2i)=-\frac{6+3i}{5}$$

対応する z は，①から，

$$z=-\frac{-\dfrac{6+3i}{5}-2i}{-\dfrac{6+3i}{5}+4}=\frac{6+13i}{14-3i}=\frac{(6+13i)(14+3i)}{14^2+3^2}=\frac{45+200i}{205}=\frac{9+40i}{41}$$

［解　説］

複素数平面上の変換についての頻出題です。なお，(3)は先に $w=x+yi$ として③を導いてから図を描いても構いません。