1

解答解説のページへ

座標平面の原点を O とし，2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$ をとり，単位円周上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}$，$\cos\dfrac{\pi}{12}$，$\sin\dfrac{5\pi}{12}$，$\cos\dfrac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 OAPB の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\dfrac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\dfrac{5\pi}{12}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間の原点を O とし，3 点 $A(2,\ 2,\ -2)$，$B(2,\ -2,\ 2)$，$C(-2,\ 2,\ 2)$ をとる。線分 AB を $3:1$ に内分する点を D，線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D, E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角 θ が $\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点 F の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

式 A, B, C を次のように定める。

$$A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$$

$$B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5\,,\quad C = y + x - 1$$

次の問いに答えよ。

(1) 式 A, B, C を y の整式とみて，A, B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

曲線 C を $y=x^2e^x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形をかけ。

(2)　$\displaystyle\int xe^x dx$, $\displaystyle\int x^2e^x dx$ をそれぞれ求めよ。

(3)　点 $(t,\ 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4)　(3)で求めた t のうち $-1<t<0$ を満たすものを T とする。点 $(T,\ 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ とし，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。 $z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$

ただし，α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

(3) $|\beta|\leqq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき，$|z|$ の最大値を求めよ。また，そのときの β, z を求めよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

1

問題のページへ

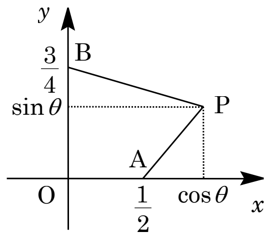
(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\dfrac{5\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) 点 $A\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$B\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，四角形 OAPB の面積 S は,

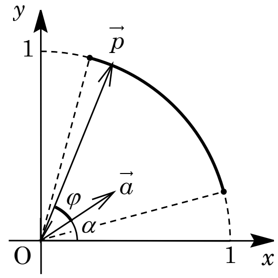


$$S=\triangle OAP+\triangle OBP=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta$$
$$=\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{3}{8}\cos\theta\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) $\vec{a}=\left(\dfrac{3}{8},\ \dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{8}(3,\ 2)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ おくと，(*)から,

$$S=\frac{3}{8}\cos\theta+\frac{1}{4}\sin\theta=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi \quad (\varphi \text{は} \vec{a} \text{と} \vec{p} \text{のなす角})$$

すると，$|\vec{a}|$，$|\vec{p}|$ は一定なので，S が最大となるのは $\cos\varphi$ が最大すなわち φ が最小のとき，また S が最小となるのは $\cos\varphi$ が最小すなわち φ が最大のときに対応する。



ここで，$\vec{a}$ と x 軸の正の部分とのなす角を α とおくと,

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

そして，$\dfrac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\dfrac{5\pi}{12}$ に注意すると,

(i) φ が最小となるとき　$\theta=\alpha$ より，S の最大値は,

$$S=\frac{3}{8}\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{13}{8\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{8}$$

(ii) φ が最大となるとき　$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ より，S の最小値は,

$$S=\frac{3}{8}\cos\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{4}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{32}$$

［解 説］

基本的な三角関数の図形への応用問題です。(3)は sin での合成という方法もありますが，不等式の処理が面倒なので，内積を利用した図形的な解法を採りました。

2

問題のページへ

(1) 点 $A(2,\ 2,\ -2)$，$B(2,\ -2,\ 2)$ に対し，線分 AB を $3:1$ に内分する点 D の座標は,

$$\left(\frac{3\cdot 2+1\cdot 2}{3+1},\ \frac{3\cdot(-2)+1\cdot 2}{3+1},\ \frac{3\cdot 2+1\cdot(-2)}{3+1}\right)=(2,\ -1,\ 1)$$

また，点 $C(-2,\ 2,\ 2)$ に対し，線分 AC を $3:1$ に外分する点 E の座標は,

$$\left(\frac{3\cdot(-2)-1\cdot 2}{3-1},\ \frac{3\cdot 2-1\cdot 2}{3-1},\ \frac{3\cdot 2-1\cdot(-2)}{3-1}\right)=(-4,\ 2,\ 4)$$

(2) 直線 DE 上の点 F は，t を実数として，$\overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}$ と表せ,

$$\overrightarrow{OF}=(1-t)(2,\ -1,\ 1)+t(-4,\ 2,\ 4)=(-6t+2,\ 3t-1,\ 3t+1)$$

これより，$|\overrightarrow{OF}|=\sqrt{(-6t+2)^2+(3t-1)^2+(3t+1)^2}=\sqrt{6(9t^2-4t+1)}$

また，$\overrightarrow{BC}=(-4,\ 4,\ 0)$ より，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

さて，$\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ より，$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{OF}||\overrightarrow{BC}|\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$

$$-4(-6t+2)+4(3t-1)=\sqrt{6(9t^2-4t+1)}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$36t-12=\frac{12}{7}\sqrt{21(9t^2-4t+1)},\ \ 7(3t-1)=\sqrt{21(9t^2-4t+1)}$$

ここで，$3t-1\geqq 0\ \left(t\geqq\dfrac{1}{3}\right)$ のもとで，両辺 2 乗すると,

$$49(3t-1)^2=21(9t^2-4t+1),\ \ 18t^2-15t+2=0,\ \ (3t-2)(6t-1)=0$$

$t\geqq\dfrac{1}{3}$ から $t=\dfrac{2}{3}$ となり，$\overrightarrow{OF}=(-2,\ 1,\ 3)$ から $F(-2,\ 1,\ 3)$ である。

［解 説］

空間ベクトルについての基本題です。(2)は，普通に成分表示で計算しましたが，やや計算が面倒です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$A=y^2-3x^2y+11xy+4y-3x^3+13x^2-5x-5$ を $C=y+x-1$ で割ると，

$$A=C(y-3x^2+10x+5)$$

また，$B=y^2+x^2y-5xy+4y+x^3-7x^2+11x-5$ を $C=y+x-1$ で割ると，

$$B=C(y+x^2-6x+5)$$

(2)　不等式 $\log A>\log(-B)$ は，$A>0$ かつ $-B>0$ かつ $A>-B$ と同値である。

そして，$-B>0$ かつ $A>-B$ から，$A>0$ は成り立つので，まとめると，

$$-B>0 \text{ かつ } A>-B \iff B<0 \text{ かつ } A+B>0$$

すると，(1)の結果より，$B=C(y+x^2-6x+5)<0$ となり，

$$(y+x-1)(y+x^2-6x+5)<0 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$A+B=C\{(y-3x^2+10x+5)+(y+x^2-6x+5)\}>0$ から，

$$(y+x-1)(y-x^2+2x+5)>0 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，領域①かつ②の境界線は，$y+x-1=0\ (y=-x+1) \cdots\cdots\cdots ③$

$$y+x^2-6x+5=0\ \left(y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4\right) \cdots\cdots\cdots ④$$

$$y-x^2+2x+5=0\ \left(y=x^2-2x-5=(x-1)^2-6\right) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③④から $-x+1=-x^2+6x-5$ となり，$x^2-7x+6=0$，$(x-1)(x-6)=0$

$$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (6,\ -5)$$

③⑤から $-x+1=x^2-2x-5$ となり，$x^2-x-6=0$，$(x+2)(x-3)=0$

$$(x,\ y)=(-2,\ 3),\ (3,\ -2)$$

④⑤から $-x^2+6x-5=x^2-2x-5$ となり，$2x^2-8x=0$，$2x(x-4)=0$

$$(x,\ y)=(0,\ -5),\ (4,\ 3)$$

(i)　$y+x-1>0\ (y>-x+1)$ のとき　①②より，

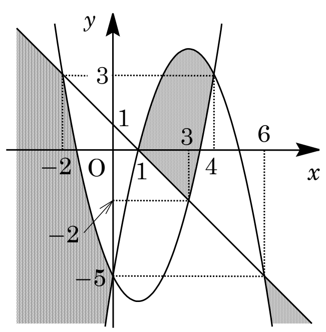
$$y+x^2-6x+5<0\ \left(y<-(x-3)^2+4\right)$$

$$y-x^2+2x+5>0\ \left(y>(x-1)^2-6\right)$$

(ii)　$y+x-1<0\ (y<-x+1)$ のとき　①②より，

$$y+x^2-6x+5>0\ \left(y>-(x-3)^2+4\right)$$

$$y-x^2+2x+5<0\ \left(y<(x-1)^2-6\right)$$



(i)(ii)より，①かつ②の領域は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まない。

[解　説]

整式の除法と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，図示するには時間がかなり必要になります。

4

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = x^2e^x$ に対して,

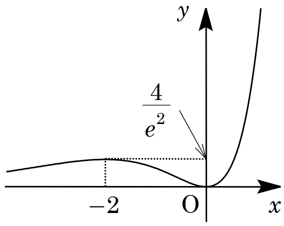
$$y' = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

すると, y の増減は右表のようになり,

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty} y = 0,\ \lim_{x\to\infty} y = \infty$$

これより, 曲線 C の概形は右図の通りである。



(2)　A, B を積分定数として,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + A$$

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = (x^2-2x+2)e^x + B$$

(3)　曲線 C 上の点 $(p,\ p^2e^p)$ における接線の方程式は,

$$y - p^2e^p = p(p+2)e^p(x-p) \cdots\cdots\cdots ①$$

①が点 $(t,\ 0)$ を通ることより, $-p^2e^p = p(p+2)e^p(t-p)$ となり,

$$-p^2 = p(p+2)(t-p),\ p\{p^2-(t-1)p-2t\} = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$p = 0 \quad \text{または} \quad p^2-(t-1)p-2t = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて, 接線が 2 本存在する条件は, ②の実数解が 2 個であることに対応するので,

(i)　③が $p \neq 0$ の重解をもつとき

$D = (t-1)^2 + 8t = 0$ から $t^2 + 6t + 1 = 0$ となり, $t = -3 \pm 2\sqrt{2}$

なお, このいずれの値の場合も $p = \dfrac{t-1}{2} \neq 0$ である。

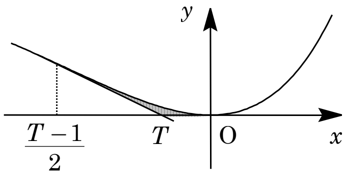
(ii)　③が $p = 0$ と $p \neq 0$ の実数解をもつとき

$-2t = 0$ から $t = 0$ となり, このとき③は $p^2 + p = 0$ から, $p = 0,\ -1$

これより, 条件に適する。

(i)(ii)より, 求める t の値は, $t = 0,\ -3 \pm 2\sqrt{2}$ である。

(4)　(3)の結果で $-1 < t < 0$ を満たすものを T とすると, $T = -3 + 2\sqrt{2}$ となり, このとき, 接点は $p = 0$ と $p = \dfrac{T-1}{2} = -2 + \sqrt{2}$ である。



すると, 点 $(T,\ 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_{-2+\sqrt{2}}^{0} x^2e^x\,dx - \frac{1}{2}\{(-3+2\sqrt{2})-(-2+\sqrt{2})\}(-2+\sqrt{2})^2e^{-2+\sqrt{2}}$$

$$= \Big[(x^2-2x+2)e^x\Big]_{-2+\sqrt{2}}^{0} - \frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})\cdot 2(3-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$$

$$= 2 - (12-6\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} - (-7+5\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} = 2 - (5-\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。(4)の積分計算がやや難です。なお, (3)では記述量を考え, 複接線の存在については触れていません。少し気になるのですが。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) $z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=(z+\alpha)(\overline{z+\alpha})=|z+\alpha|^2$

(2) $z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$……①に対し，$\alpha=1+i+\beta$ とおくと，

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\alpha-1-i,\ (z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i$$

よって，$|z+\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i$……②となり，①を満たす z が存在する条件は，

$$\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i\geqq 0\text{………③}$$

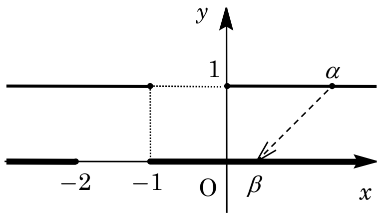
ここで，$\alpha=x+yi$ とおくと，③より，$x^2+y^2+x+yi-1-i\geqq 0$ となり，

$$x^2+y^2+x-1+(y-1)i\geqq 0$$

これより，$x^2+y^2+x-1\geqq 0$ かつ $y-1=0$ となり，

$$x^2+x\geqq 0\ \text{かつ}\ y=1$$

まとめると，$y=1\ (x\leqq -1,\ 0\leqq x)$ なので，複素数 α の範囲は右図の 2 つの半直線（細線）である。すると，$\beta=\alpha-1-i$ から，複素数 β の範囲は実軸上の 2 つの半直線（太線）となる。



(3) $|\beta|\leqq 2$ として，複素数 z が①を満たすとき，(2)の結果から，$\beta=-2$ または $\beta=t\ (-1\leqq t\leqq 2)$ である。

(i) $\beta=-2$ のとき　$\alpha=1+i-2=-1+i$ となり，②から，

$$|z+\alpha|^2=\{(-1)^2+1^2\}+(-1+i)-1-i=0$$

よって，$z=-\alpha=1-i$ から，$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ である。

(ii) $\beta=t\ (-1\leqq t\leqq 2)$ のとき　$\alpha=1+i+t=(t+1)+i$ となり，②から，

$$|z+\alpha|^2=\{(t+1)^2+1^2\}+(t+1+i)-1-i=(t+1)(t+2)$$

これより，z は中心 $-\alpha=-(t+1)-i$ で，半径 $r=\sqrt{(t+1)(t+2)}$ の円周上の点となる。すると，$|z|$ が最大となるのは，原点 O, 中心 $-\alpha$，点 z がこの順で一直線上に並ぶときであり，その最大値は $|-\alpha|+r$ である。

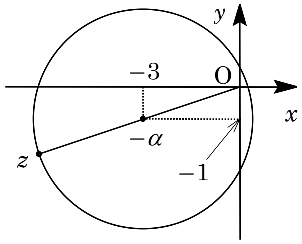
さて，$|-\alpha|=\sqrt{(t+1)^2+1}$，$r=\sqrt{t^2+3t+2}=\sqrt{\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}$ から，$-1\leqq t\leqq 2$ において $|-\alpha|$ と r はともに単調増加するので，$t=2$ のときに最大となり，

$$|-\alpha|=\sqrt{(2+1)^2+1}=\sqrt{10}$$

$$r=\sqrt{2^2+3\cdot 2+2}=2\sqrt{3}$$

よって，$|z|$ の最大値は，

$$|-\alpha|+r=\sqrt{10}+2\sqrt{3}$$



(i)(ii)より，$|z|$ の最大値は $\sqrt{10}+2\sqrt{3}$ である。

したがって，$|z|$が最大になるのは，$\beta=2$，$-\alpha=-3-i$のときであり，

$$z=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\cdot(-3-i)=-\left(1+\frac{\sqrt{30}}{5}\right)(3+i)$$

［解 説］

複素数と図形に関する問題です。(3)は 2 つの文字についての最大問題なので，やや記述しにくいところがあります。