1

解答解説のページへ

式 A, B, C を次のように定める。

$$A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$$

$$B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5\ ,\ \ C = y + x - 1$$

次の問いに答えよ。

(1) 式 A, B, C を y の整式とみて，A, B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

曲線 C を $y = x^2e^x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形をかけ。

(2)　$\displaystyle\int xe^x dx$，$\displaystyle\int x^2e^x dx$ をそれぞれ求めよ。

(3)　点 $(t,\ 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4)　(3)で求めた t のうち $-1 < t < 0$ を満たすものを T とする。点 $(T,\ 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ とし，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。　　$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$

ただし，α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

(3) $|\beta|\leqq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき，$|z|$ の最大値を求めよ。また，そのときの β, z を求めよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

4

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次のように定める。関数$f(x)=x^2$とし，$a_1=10$とする。曲線$y=f(x)$の点$(a_n,\ f(a_n))$における法線と曲線$y=f(x)$との 2 つの交点を$(a_n,\ f(a_n))$，$(-a_{n+1},\ f(-a_{n+1}))$とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1}をa_nを用いて表せ。

(2)　すべての$n\geqq 1$に対して，$\left|a_n-\sqrt{n+99}\right|\leqq 1$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$A=y^2-3x^2y+11xy+4y-3x^3+13x^2-5x-5$ を $C=y+x-1$ で割ると，

$$A=C(y-3x^2+10x+5)$$

また，$B=y^2+x^2y-5xy+4y+x^3-7x^2+11x-5$ を $C=y+x-1$ で割ると，

$$B=C(y+x^2-6x+5)$$

(2)　不等式 $\log A>\log(-B)$ は，$A>0$ かつ $-B>0$ かつ $A>-B$ と同値である。

そして，$-B>0$ かつ $A>-B$ から，$A>0$ は成り立つので，まとめると，

$$-B>0 \text{ かつ } A>-B \iff B<0 \text{ かつ } A+B>0$$

すると，(1)の結果より，$B=C(y+x^2-6x+5)<0$ となり，

$$(y+x-1)(y+x^2-6x+5)<0 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$A+B=C\{(y-3x^2+10x+5)+(y+x^2-6x+5)\}>0$ から，

$$(y+x-1)(y-x^2+2x+5)>0 \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，領域①かつ②の境界線は，$y+x-1=0\ (y=-x+1) \cdots\cdots\cdots③$

$$y+x^2-6x+5=0\ \left(y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4\right) \cdots\cdots\cdots④$$

$$y-x^2+2x+5=0\ \left(y=x^2-2x-5=(x-1)^2-6\right) \cdots\cdots\cdots⑤$$

③④から $-x+1=-x^2+6x-5$ となり，$x^2-7x+6=0$，$(x-1)(x-6)=0$

$$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (6,\ -5)$$

③⑤から $-x+1=x^2-2x-5$ となり，$x^2-x-6=0$，$(x+2)(x-3)=0$

$$(x,\ y)=(-2,\ 3),\ (3,\ -2)$$

④⑤から $-x^2+6x-5=x^2-2x-5$ となり，$2x^2-8x=0$，$2x(x-4)=0$

$$(x,\ y)=(0,\ -5),\ (4,\ 3)$$

(i)　$y+x-1>0\ (y>-x+1)$ のとき　①②より，

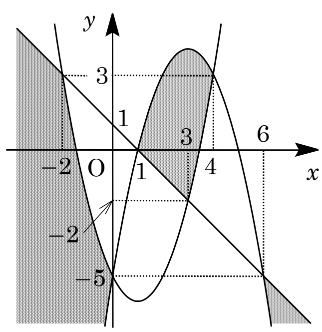
$$y+x^2-6x+5<0\ \left(y<-(x-3)^2+4\right)$$

$$y-x^2+2x+5>0\ \left(y>(x-1)^2-6\right)$$

(ii)　$y+x-1<0\ (y<-x+1)$ のとき　①②より，

$$y+x^2-6x+5>0\ \left(y>-(x-3)^2+4\right)$$

$$y-x^2+2x+5<0\ \left(y<(x-1)^2-6\right)$$



(i)(ii)より，①かつ②の領域は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まない。

［解 説］

整式の除法と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，図示するには時間がかなり必要になります。

© 電送数学舎 2022

2

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = x^2e^x$ に対して,

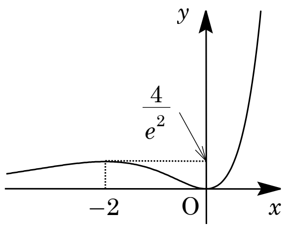
$$y' = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

すると, y の増減は右表のようになり,

$$\lim_{x\to-\infty} y = 0,\quad \lim_{x\to\infty} y = \infty$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

これより, 曲線 C の概形は右図の通りである。



(2)　A, B を積分定数として,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + A$$

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = (x^2-2x+2)e^x + B$$

(3)　曲線 C 上の点 $(p,\ p^2e^p)$ における接線の方程式は,

$$y - p^2e^p = p(p+2)e^p(x-p)\ \cdots\cdots\cdots①$$

①が点 $(t,\ 0)$ を通ることより, $-p^2e^p = p(p+2)e^p(t-p)$ となり,

$$-p^2 = p(p+2)(t-p),\quad p\{p^2-(t-1)p-2t\} = 0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$p = 0\ \ \text{または}\ \ p^2-(t-1)p-2t = 0\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて, 接線が 2 本存在する条件は, ②の実数解が 2 個であることに対応するので,

(i)　③が $p \neq 0$ の重解をもつとき

$D = (t-1)^2 + 8t = 0$ から $t^2+6t+1 = 0$ となり, $t = -3\pm2\sqrt{2}$

なお, このいずれの値の場合も $p = \dfrac{t-1}{2} \neq 0$ である。

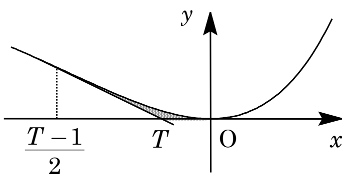
(ii)　③が $p = 0$ と $p \neq 0$ の実数解をもつとき

$-2t = 0$ から $t = 0$ となり, このとき③は $p^2+p = 0$ から, $p = 0,\ -1$

これより, 条件に適する。

(i)(ii)より, 求める t の値は, $t = 0$, $-3\pm2\sqrt{2}$ である。

(4)　(3)の結果で $-1 < t < 0$ を満たすものを T とすると, $T = -3+2\sqrt{2}$ となり, このとき, 接点は $p = 0$ と $p = \dfrac{T-1}{2} = -2+\sqrt{2}$ である。



すると, 点 $(T,\ 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_{-2+\sqrt{2}}^{0} x^2e^x\,dx - \frac{1}{2}\{(-3+2\sqrt{2})-(-2+\sqrt{2})\}(-2+\sqrt{2})^2e^{-2+\sqrt{2}}$$

$$= \Big[(x^2-2x+2)e^x\Big]_{-2+\sqrt{2}}^{0} - \frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})\cdot2(3-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$$

$$= 2-(12-6\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} - (-7+5\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} = 2-(5-\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$$

© 電送数学舎 2022

［解 説］

微積分の総合問題です。(4)の積分計算がやや難です。なお，(3)では記述量を考え，複接線の存在については触れていません。少し気になるのですが。

© 電送数学舎 2022

3　問題のページへ

(1)　$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=(z+\alpha)(\overline{z+\alpha})=|z+\alpha|^2$

(2)　$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$ ……①に対し，$\alpha=1+i+\beta$ とおくと，

$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\alpha-1-i$，$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i$

よって，$|z+\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i$ ……②となり，①を満たす z が存在する条件は，

$\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i\geqq 0$ ………③

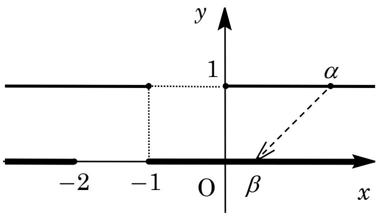
ここで，$\alpha=x+yi$ とおくと，③より，$x^2+y^2+x+yi-1-i\geqq 0$ となり，

$x^2+y^2+x-1+(y-1)i\geqq 0$

これより，$x^2+y^2+x-1\geqq 0$ かつ $y-1=0$ となり，

$x^2+x\geqq 0$　かつ　$y=1$

まとめると，$y=1$ $(x\leqq -1,\ 0\leqq x)$ なので，複素数 α の範囲は右図の 2 つの半直線（細線）である。すると，$\beta=\alpha-1-i$ から，複素数 β の範囲は実軸上の 2 つの半直線（太線）となる。



(3)　$|\beta|\leqq 2$ として，複素数 z が①を満たすとき，(2)の結果から，$\beta=-2$ または $\beta=t$ $(-1\leqq t\leqq 2)$ である。

(i)　$\beta=-2$ のとき　$\alpha=1+i-2=-1+i$ となり，②から，

$|z+\alpha|^2=\{(-1)^2+1^2\}+(-1+i)-1-i=0$

よって，$z=-\alpha=1-i$ から，$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ である。

(ii)　$\beta=t$ $(-1\leqq t\leqq 2)$ のとき　$\alpha=1+i+t=(t+1)+i$ となり，②から，

$|z+\alpha|^2=\{(t+1)^2+1^2\}+(t+1+i)-1-i=(t+1)(t+2)$

これより，z は中心 $-\alpha=-(t+1)-i$ で，半径 $r=\sqrt{(t+1)(t+2)}$ の円周上の点となる。すると，$|z|$ が最大となるのは，原点 O，中心 $-\alpha$，点 z がこの順で一直線上に並ぶときであり，その最大値は $|-\alpha|+r$ である。

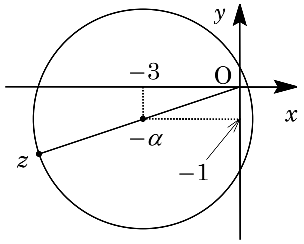
さて，$|-\alpha|=\sqrt{(t+1)^2+1}$，$r=\sqrt{t^2+3t+2}=\sqrt{\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}$ から，$-1\leqq t\leqq 2$ において $|-\alpha|$ と r はともに単調増加するので，$t=2$ のときに最大となり，

$|-\alpha|=\sqrt{(2+1)^2+1}=\sqrt{10}$

$r=\sqrt{2^2+3\cdot 2+2}=2\sqrt{3}$

よって，$|z|$ の最大値は，

$|-\alpha|+r=\sqrt{10}+2\sqrt{3}$



(i)(ii)より，$|z|$ の最大値は $\sqrt{10}+2\sqrt{3}$ である。

© 電送数学舎 2022

したがって，$|z|$ が最大になるのは，$\beta=2$，$-\alpha=-3-i$ のときであり，

$$z=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\cdot(-3-i)=-\left(1+\frac{\sqrt{30}}{5}\right)(3+i)$$

［解 説］

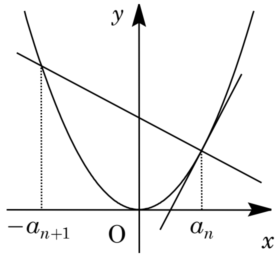
複素数と図形に関する問題です。(3)は 2 つの文字についての最大問題なので，やや記述しにくいところがあります。

© 電送数学舎 2022

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2$ に対して $f'(x)=2x$ となり，曲線 $y=f(x)$ の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における法線は，法線ベクトルの成分を $(1,\ 2a_n)$ とすることができ，その方程式は，



$$(x-a_n)+2a_n(y-a_n{}^2)=0$$

ここで，$y=f(x)$ と連立すると，

$$(x-a_n)+2a_n(x^2-a_n{}^2)=0$$

$$(x-a_n)\{1+2a_n(x+a_n)\}=0$$

条件から，$x\neq a_n$ の解が $x=-a_{n+1}$ より，$1+2a_n(-a_{n+1}+a_n)=0$

ここで，$a_n=0$ とすると成り立たないので，$a_n\neq 0$ のもとで，

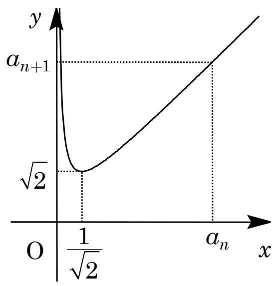
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2a_n},\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2a_n}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) まず，$g(x)=x+\dfrac{1}{2x}\ (x>0)$ に対して，

$$g'(x)=1-\frac{1}{2x^2}=\frac{2x^2-1}{2x^2}$$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになるので，グラフは右図の通りである。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	×	↘	$\sqrt{2}$	↗



さて，①から，$a_1=10$，$a_{n+1}=g(a_n)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\left|a_n-\sqrt{n+99}\right|\leqq 1$ であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=10$ より，

$\left|a_1-\sqrt{1+99}\right|=\left|10-10\right|=0\leqq 1$ となり，成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$\left|a_k-\sqrt{k+99}\right|\leqq 1$ と仮定すると，

$$\sqrt{k+99}-1\leqq a_k\leqq\sqrt{k+99}+1$$

$g(x)$ は $x\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で単調に増加し，$g\left(\sqrt{k+99}-1\right)\leqq g(a_k)\leqq g\left(\sqrt{k+99}+1\right)$

$$g\left(\sqrt{k+99}-1\right)\leqq a_{k+1}\leqq g\left(\sqrt{k+99}+1\right)\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$P(k)=g\left(\sqrt{k+99}-1\right)-\left(\sqrt{k+100}-1\right)$ とおくと，

$$P(k)=\sqrt{k+99}-1+\frac{1}{2\left(\sqrt{k+99}-1\right)}-\sqrt{k+100}+1$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{k+99}-1\right)}-\frac{1}{\sqrt{k+100}+\sqrt{k+99}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{k+100}-\sqrt{k+99}}{2\left(\sqrt{k+99}-1\right)\left(\sqrt{k+100}+\sqrt{k+99}\right)}$$

© 電送数学舎 2022

これより $P(k)\geqq 0$ となり，$\sqrt{k+100}-1\leqq g(\sqrt{k+99}-1)$………③

また，$Q(k)=(\sqrt{k+100}+1)-g(\sqrt{k+99}+1)$ とおくと，

$$Q(k)=\sqrt{k+100}+1-\sqrt{k+99}-1-\frac{1}{2(\sqrt{k+99}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+100}+\sqrt{k+99}}-\frac{1}{2(\sqrt{k+99}+1)}$$

$$=\frac{2+\sqrt{k+99}-\sqrt{k+100}}{2(\sqrt{k+99}+1)(\sqrt{k+100}+\sqrt{k+99})}$$

$$=\frac{1}{2(\sqrt{k+99}+1)(\sqrt{k+100}+\sqrt{k+99})}\left(2-\frac{1}{\sqrt{k+99}+\sqrt{k+100}}\right)$$

これより $Q(k)\geqq 0$ となり，$g(\sqrt{k+99}+1)\leqq\sqrt{k+100}+1$………④

②③④より，$\sqrt{k+100}-1\leqq a_{k+1}\leqq\sqrt{k+100}+1$ となり，

$$\left|a_{k+1}-\sqrt{(k+1)+99}\right|\leqq 1$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，すべての $n\geqq 1$ に対して，$\left|a_n-\sqrt{n+99}\right|\leqq 1$ が成り立つ。

(3)　(2)より，$\sqrt{n+99}-1\leqq a_n\leqq\sqrt{n+99}+1$ なので，

$$\sqrt{1+\frac{99}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq\frac{a_n}{\sqrt{n}}\leqq\sqrt{1+\frac{99}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

すると，$n\to\infty$ のとき $\sqrt{1+\frac{99}{n}}\to 1$，$\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$ である。

［解　説］

数列の極限の標準的な問題です。ただ，(2)の数学的帰納法による証明は，無理やり押さえ込んだような形になっていますが。なお，$g(x)$ のグラフについては，見通しをよくするために記しているだけです。

© 電送数学舎 2022