1

解答解説のページへ

座標平面の原点を O とし，2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとり，単位円周上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\dfrac{\pi}{12}$，$\cos\dfrac{\pi}{12}$，$\sin\dfrac{5\pi}{12}$，$\cos\dfrac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　四角形 OAPB の面積 S を θ を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標空間の原点を O とし，3 点 $A(2,\ 2,\ -2)$，$B(2,\ -2,\ 2)$，$C(-2,\ 2,\ 2)$ をとる。線分 AB を $3:1$ に内分する点を D，線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　2 点 D, E の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　点 F を直線 DE 上の点とし，$\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点 F の座標を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を次のように定める。

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{3n}{n+1}a_n-10 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n=na_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad c_n=b_{n+1}-b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2の値をそれぞれ求めよ。

(2)　b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(3)　c_{n+1}をc_nを用いて表せ。

(4)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$0<-(y+x-1)(y+x^2-6x+5)<(y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$$

(2)　(1)で図示した領域のうち$1 \leqq x \leqq 4$を満たす部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

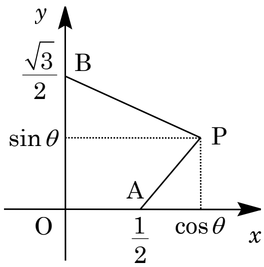
$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) 点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

に対して，四角形 OAPB の面積 S は，

$$S=\triangle\mathrm{OAP}+\triangle\mathrm{OBP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta\cdots\cdots\cdots(*)$$



(3) $(*)$を合成すると，$S=\frac{1}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

ここで，$\frac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ から $\frac{5\pi}{12}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7\pi}{12}$ なので，$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ $\left(\theta=\frac{\pi}{6}\right)$のとき，$S$ は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。また，$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$，$\frac{7\pi}{12}$ $\left(\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}\right)$のとき，$S$ は最小値 $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$ をとる。

［解　説］

基本的な三角関数の図形への応用問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) 点 $A(2,\ 2,\ -2)$，$B(2,\ -2,\ 2)$ に対し，線分 AB を $3:1$ に内分する点 D の座標は，

$$\left(\frac{3\cdot 2+1\cdot 2}{3+1},\ \frac{3\cdot(-2)+1\cdot 2}{3+1},\ \frac{3\cdot 2+1\cdot(-2)}{3+1}\right)=(2,\ -1,\ 1)$$

また，点 $C(-2,\ 2,\ 2)$ に対し，線分 AC を $3:1$ に外分する点 E の座標は，

$$\left(\frac{3\cdot(-2)-1\cdot 2}{3-1},\ \frac{3\cdot 2-1\cdot 2}{3-1},\ \frac{3\cdot 2-1\cdot(-2)}{3-1}\right)=(-4,\ 2,\ 4)$$

(2) 直線 DE 上の点 F は，t を実数として，$\overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}$ と表せ，

$$\overrightarrow{OF}=(1-t)(2,\ -1,\ 1)+t(-4,\ 2,\ 4)=(-6t+2,\ 3t-1,\ 3t+1)$$

これより，$|\overrightarrow{OF}|=\sqrt{(-6t+2)^2+(3t-1)^2+(3t+1)^2}=\sqrt{6(9t^2-4t+1)}$

また，$\overrightarrow{BC}=(-4,\ 4,\ 0)$ より，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

さて，$\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ より，$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{OF}||\overrightarrow{BC}|\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$

$$-4(-6t+2)+4(3t-1)=\sqrt{6(9t^2-4t+1)}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$36t-12=\frac{12}{7}\sqrt{21(9t^2-4t+1)},\ 7(3t-1)=\sqrt{21(9t^2-4t+1)}$$

ここで，$3t-1\geqq 0\ \left(t\geqq\dfrac{1}{3}\right)$ のもとで，両辺 2 乗すると，

$$49(3t-1)^2=21(9t^2-4t+1),\ 18t^2-15t+2=0,\ (3t-2)(6t-1)=0$$

$t\geqq\dfrac{1}{3}$ から $t=\dfrac{2}{3}$ となり，$\overrightarrow{OF}=(-2,\ 1,\ 3)$ から $F(-2,\ 1,\ 3)$ である。

［解　説］

空間ベクトルについての基本題です。(2)は，普通に成分表示で計算しましたが，やや計算が面倒です。

3

問題のページへ

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3n}{n+1}a_n-10$……①より，

$$a_2=\frac{3}{2}a_1-10=-\frac{11}{2},\ \ a_3=\frac{6}{3}a_2-10=-21$$

また，$b_n=na_n$……②より，$b_1=a_1=3$，$b_2=2a_2=-11$，$b_3=3a_3=-63$

さらに，$c_n=b_{n+1}-b_n$……③より，$c_1=b_2-b_1=-14$，$c_2=b_3-b_2=-52$

(2)　①②より，$b_{n+1}=(n+1)a_{n+1}=(n+1)\left(\dfrac{3n}{n+1}a_n-10\right)=3na_n-10(n+1)$となり，

$$b_{n+1}=3b_n-10(n+1)\ \cdots\cdots\cdots④$$

(3)　③④より，$c_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}=3b_{n+1}-10(n+2)-3b_n+10(n+1)$となり，

$$c_{n+1}=3(b_{n+1}-b_n)-10=3c_n-10\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(4)　⑤より，$c_{n+1}-5=3(c_n-5)$となり，

$$c_n-5=(c_1-5)\cdot 3^{n-1}=-19\cdot 3^{n-1},\ \ c_n=5-19\cdot 3^{n-1}$$

③より，$n\geqq 2$で，$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(5-19\cdot 3^{k-1})=3+5(n-1)-19\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}$となり，

$$b_n=-\frac{19}{2}\cdot 3^{n-1}+5n+\frac{15}{2}$$（この式は$n=1$のときも成り立っている）

②より，$a_n=\dfrac{b_n}{n}=-\dfrac{19}{2n}\cdot 3^{n-1}+\dfrac{15}{2n}+5$である。

［解 説］

誘導つきで漸化式を解く問題です。

4

問題のページへ

(1) 不等式 $0<-(y+x-1)(y+x^2-6x+5)<(y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$ に対して，

まず，$0<-(y+x-1)(y+x^2-6x+5)$ は，

$(y+x-1)(y+x^2-6x+5)<0$ ………①

また，$-(y+x-1)(y+x^2-6x+5)<(y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$ は，

$(y+x-1)(y-3x^2+10x+5+y+x^2-6x+5)>0$

$(y+x-1)(y-x^2+2x+5)>0$ ………②

ここで，領域①かつ②の境界線は，$y+x-1=0$ $(y=-x+1)$ ………③

$y+x^2-6x+5=0$ $\left(y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4\right)$ ………④

$y-x^2+2x+5=0$ $\left(y=x^2-2x-5=(x-1)^2-6\right)$ ………⑤

③④から $-x+1=-x^2+6x-5$ となり，$x^2-7x+6=0$，$(x-1)(x-6)=0$

$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (6,\ -5)$

③⑤から $-x+1=x^2-2x-5$ となり，$x^2-x-6=0$，$(x+2)(x-3)=0$

$(x,\ y)=(-2,\ 3),\ (3,\ -2)$

④⑤から $-x^2+6x-5=x^2-2x-5$ となり，$2x^2-8x=0$，$2x(x-4)=0$

$(x,\ y)=(0,\ -5),\ (4,\ 3)$

(i) $y+x-1>0$ $(y>-x+1)$ のとき　①②より，

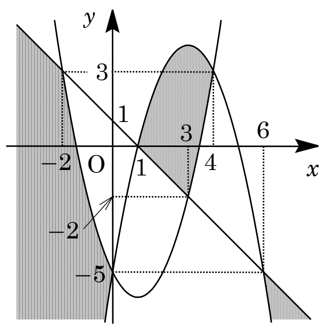
$y+x^2-6x+5<0$ $\left(y<-(x-3)^2+4\right)$

$y-x^2+2x+5>0$ $\left(y>(x-1)^2-6\right)$

(ii) $y+x-1<0$ $(y<-x+1)$ のとき　①②より，

$y+x^2-6x+5>0$ $\left(y>-(x-3)^2+4\right)$

$y-x^2+2x+5<0$ $\left(y<(x-1)^2-6\right)$



(i)(ii)より，①かつ②の領域は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まない。

(2) (1)の領域のうち，$1\leqq x\leqq 4$ を満たす部分の面積 S は，

$$S=\int_1^3\{(-x^2+6x-5)-(-x+1)\}dx+\int_3^4\{(-x^2+6x-5)-(x^2-2x-5)\}dx$$

$$=\int_1^3(-x^2+7x-6)dx+\int_3^4(-2x^2+8x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x^2-6x\right]_1^3+\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_3^4=-\frac{26}{3}+\frac{56}{2}-12-\frac{74}{3}+28=\frac{32}{3}$$

［解　説］

不等式と領域および面積の融合問題です。基本的な内容ですが，図示するには時間がかなり必要になります。