**1**

解答解説のページへ

平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 $n$ だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを 2 回投げて出た目の積で $n$ を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2)　さいころを $k$ 回投げて出た目の積で $n$ を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(3)　さいころを $k$ 回投げて出た目の積で $n$ を与えるとき，点 P が頂点 B の位置にある確率を $b_k$ とする。$b_{k+1}$ を $b_k$ を用いて表せ。

(4)　(3)で与えた $b_k$ に対して，$f_k=6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

**2**

解答解説のページへ

実数 $a$ と $b$ に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+\cos x+2\cos\dfrac{x}{2}$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=4+\pi$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx=\frac{4}{3}(4+\pi)$ を満たすとき，$a$ と $b$ の値を求めよ。

(4) (3)で求めた $a$ と $b$ で定まる $f(x)$ に対して，$f(x)$ の最小値とそのときの $x$ の値を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の 4 点 $z_1$，$z_2$，$z_3$，$z_4$ は

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\theta_1>0,\ \arg\frac{z_3}{z_2}=\theta_2>0,\ \arg\frac{z_4}{z_3}=\theta_3>0,\ \theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $|z_2-z_1|$ を $\theta_1$ を用いて表せ。

(2) $|z_3-z_1|$，$|z_4-z_1|$ を $\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$ を用いて表せ。

(3) $\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ を示せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$a \geqq 0$ とし，$n$ を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ のとき，$\dfrac{x}{1+a}\left(1-\dfrac{x}{2(1+a)}\right)<\log\dfrac{1+a+x}{1+a}<\dfrac{x}{1+a}$ を示せ。

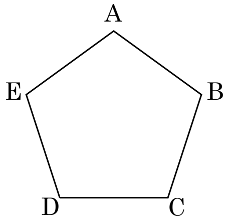
(2)　$I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$ とおく。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。

**1**

問題のページへ




(1) 正五角形 ABCDE に対して，点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 $n$ だけ動かす。

さいころを 2 回投げて出た目の積で $n$ を与えるとき，さいころの目とその積 $n$ の関係をまとめると，右下表のようになる。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

すると，点 P が頂点 A の位置にあるのは，$n$ が 5 の倍数，すなわち $n=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30$ より，その確率は，

$$\frac{2+2+2+2+1+2}{6^2}=\frac{11}{36}$$

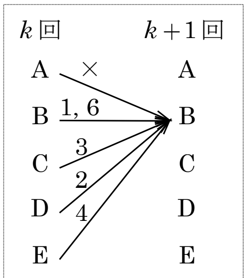
また，点 P が頂点 B の位置にあるのは，$n$ を 5 で割った余りが 1，すなわち $n=1,\ 6,\ 16,\ 36$ より，その確率は，

$$\frac{1+4+1+1}{6^2}=\frac{7}{36}$$

(2) さいころを $k$ 回投げて出た目の積で $n$ を与えるとき，点 P が頂点 A, B, C, D, E の位置にある確率をそれぞれ $a_k$，$b_k$，$c_k$，$d_k$，$e_k$ とおく。

すると，点 P が頂点 A の位置にあるのは，$k$ 回のうち少なくとも 1 回は 5 が出るときなので，その確率 $a_k$ は，$a_k=1-\left(\frac{5}{6}\right)^k$ である。

(3) (2)と同様に，点 P が頂点 B の位置にある確率 $b_k$ に対して，




$$b_{k+1}=\frac{2}{6}b_k+\frac{1}{6}c_k+\frac{1}{6}d_k+\frac{1}{6}e_k=\frac{1}{3}b_k+\frac{1}{6}(1-a_k-b_k)$$

$$=\frac{1}{6}b_k+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right\}=\frac{1}{6}b_k+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k\cdots\cdots①$$

(4) $f_k=6^kb_k$ とおくと $b_k=\dfrac{f_k}{6^k}$ となり，①より，

$$\frac{f_{k+1}}{6^{k+1}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{f_k}{6^k}+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k,\quad f_{k+1}=f_k+5^k$$

ここで，$b_1=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ から $f_1=6^1\cdot\dfrac{1}{3}=2$ となり，$k\geqq 2$ において，

$$f_k=f_1+\sum_{j=1}^{k-1}5^j=2+\frac{5(5^{k-1}-1)}{5-1}=\frac{5^k}{4}+\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

なお，②に $k=1$ をあてはめると，$f_1=\dfrac{5^1}{4}+\dfrac{3}{4}=2$ となり成り立っている。

これより，$b_k=\dfrac{f_k}{6^k}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\right)^k+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$ である。

［解 説］

確率と漸化式の標準的な問題です。(1)は直接的に数え上げましたが，5 で割った余りに注目して処理すると記述量が少なくなり，(2)以降とのつながりもよくなります。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = \Big[\,x\sin x\,\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -\Big[\,x\cos x\,\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos x\,dx = -2\pi$$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx = \Big[\,x^2\sin x\,\Big]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -2(-2\pi) = 4\pi$

$$\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx = -\Big[\,x^2\cos x\,\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = -4\pi^2\cdot 1 = -4\pi^2$$

(3) $f(x) = ax^2 + bx + \cos x + 2\cos\dfrac{x}{2}$ に対して，(1)(2)の結果を利用すると，まず，

$$\begin{aligned}4+\pi &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{2\pi}\Big(ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}\Big)\cos x\,dx\\ &= 4\pi a + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx + \int_0^{2\pi}\Big(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\Big)dx\\ &= 4\pi a + \frac{1}{2}\Big[\,x+\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{2\pi} + \Big[\,\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x + 2\sin\frac{x}{2}\,\Big]_0^{2\pi}\\ &= 4\pi a + \frac{1}{2}\cdot 2\pi = 4\pi a + \pi\end{aligned}$$

これより，$4 = 4\pi a$ から $a = \dfrac{1}{\pi}$ となり，次に，

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}(4+\pi) &= \int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = \int_0^{2\pi}\Big(ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}\Big)\sin x\,dx\\ &= -4\pi^2 a - 2\pi b + \int_0^{2\pi}\frac{\sin 2x}{2}dx + \int_0^{2\pi}\Big(\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{x}{2}\Big)dx\\ &= -4\pi - 2\pi b - \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{2}\cos 2x\,\Big]_0^{2\pi} - \Big[\,\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x + 2\cos\frac{x}{2}\,\Big]_0^{2\pi}\\ &= -4\pi - 2\pi b - \frac{2}{3}(-1-1) - 2(-1-1) = -2\pi b - 4\pi + \frac{16}{3}\end{aligned}$$

これより，$\dfrac{4}{3}\pi = -2\pi b - 4\pi$ から $b = -\dfrac{8}{3}$ となる。

(4) (3)より，$f(x) = \dfrac{1}{\pi}x^2 - \dfrac{8}{3}x + \cos x + 2\cos\dfrac{x}{2}$ となり，

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{8}{3}x + 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 1\\ &= \frac{1}{\pi}\Big(x-\frac{4}{3}\pi\Big)^2 + 2\Big(\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{16}{9}\pi - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

すると，$\dfrac{1}{\pi}\Big(x-\dfrac{4}{3}\pi\Big)^2 \geqq 0$，$2\Big(\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\Big)^2 \geqq 0$ から，$f(x) \geqq -\dfrac{16}{9}\pi - \dfrac{3}{2}$

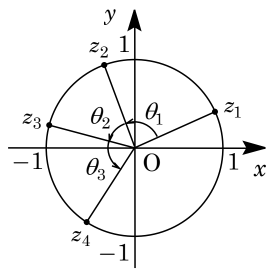
等号は $x - \dfrac{4}{3}\pi = 0$ かつ $\cos\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$ のとき，すなわち $x = \dfrac{4}{3}\pi$ かつ $\cos\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2}$ より $x = \dfrac{4}{3}\pi$ のときに成立する。

以上より，$f(x)$ は $x = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{16}{9}\pi - \dfrac{3}{2}$ をとる。

［解 説］

定積分の計算問題です。三角関数の周期性を利用して計算を進めています。ただ,(4)では通常の微分の利用ではうまくいきません。何か仕掛けがあると予想し，平方完成で処理しました。この方法への切替がやや難です。

**3**　　問題のページへ




(1)　複素数平面上の原点を中心とする単位円周上にある 4 点 $z_1$，$z_2$，$z_3$，$z_4$ に対し，$\arg\dfrac{z_2}{z_1}=\theta_1>0$，$\arg\dfrac{z_3}{z_2}=\theta_2>0$，$\arg\dfrac{z_4}{z_3}=\theta_3>0$，$\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$ とする。

3 点 O，$z_1$，$z_2$ を頂点とする三角形に余弦定理を適用すると，$0<\theta_1<\pi$ のとき，

$$|z_2-z_1|^2=1^2+1^2-2\cdot1^2\cdot\cos\theta_1=2-2\cos\theta_1$$

また，$\pi<\theta_1<2\pi$ のとき，$|z_2-z_1|^2=1^2+1^2-2\cdot1^2\cdot\cos(2\pi-\theta_1)=2-2\cos\theta_1$

さらに，$\theta_1=\pi$ のとき，$|z_2-z_1|^2=2^2=2-2\cos\pi$ となり，いずれのときも，

$$|z_2-z_1|^2=2-2\cos\theta_1$$

ここで，$0<\theta_1<\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$ より，$0<\dfrac{\theta_1}{2}<\pi$ となるので，

$$|z_2-z_1|=\sqrt{2-2\cos\theta_1}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta_1}{2}}=2\left|\sin\frac{\theta_1}{2}\right|=2\sin\frac{\theta_1}{2}$$

(2)　(1)と同様に考えると，$0<\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}<\pi$，$0<\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}<\pi$ より，

$$|z_3-z_1|=2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\quad |z_4-z_1|=2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}$$

(3)　$|z_3-z_2|=2\sin\dfrac{\theta_2}{2}$，$|z_4-z_2|=2\sin\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}$，$|z_4-z_3|=2\sin\dfrac{\theta_3}{2}$ となり，

$$|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|=4\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}+4\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}$$

$$=-2\left(\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)-2\left(\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)$$

$$=-2\left(\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)=4\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}$$

$$|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|=4\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+4\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}$$

$$=-2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)-2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$=-2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)=4\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}$$

以上より，$\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sin\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ である。

［解　説］

複素数平面についての問題ですが，内容的には三角関数の式変形です。

**4**

問題のページへ

(1) まず，$t>0$ のとき，$t\left(1-\dfrac{t}{2}\right)<\log(1+t)<t$ ……①の成立を証明する。

$f(t)=t-\log(1+t)$ とおくと，$f'(t)=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}>0$ となり，

$$f(t)>f(0)=0,\ t>\log(1+t)\ \cdots\cdots\text{②}$$

$g(t)=\log(1+t)-t\left(1-\dfrac{t}{2}\right)$ とおくと，$g'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1+t=\dfrac{t^2}{1+t}>0$ となり，

$$g(t)>g(0)=0,\ \log(1+t)>t\left(1-\frac{t}{2}\right)\ \cdots\cdots\text{③}$$

②③より①が成立し，$a\geqq 0$，$x>0$ のとき，$t=\dfrac{x}{1+a}>0$ とおくと，

$$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}\ \cdots\cdots\text{④}$$

(2) $I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$ に対して，

$$\log I_n(a)=\log\left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)$$

④より，$x=\dfrac{k}{n^2}>0$ とおくと，

$$\frac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\frac{k}{2n^2(1+a)}\right)<\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)<\frac{k}{n^2(1+a)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\frac{k}{2n^2(1+a)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}$$

すると，$n\to\infty$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}=\frac{1}{n^2(1+a)}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2n(1+a)}=\frac{1+n^{-1}}{2(1+a)}\to\frac{1}{2(1+a)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\frac{k}{2n^2(1+a)}\right)=\frac{n+1}{2n(1+a)}-\frac{1}{2n^4(1+a)^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{n+1}{2n(1+a)}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3(1+a)^2}=\frac{1+n^{-1}}{2(1+a)}-\frac{n^{-1}(1+n^{-1})(2+n^{-1})}{12(1+a)^2}\to\frac{1}{2(1+a)}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)\to\frac{1}{2(1+a)}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)=\frac{1}{2(1+a)}$

(3) $J(n)=\dfrac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ とおくと，$\log J(n)=\log\dfrac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となり，

$$\log J(n)=\log\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{3^n\cdot n^{2n}}\cdot\frac{2^n\cdot n^{2n}}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}=\log\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{(3n^2)^n}-\log\frac{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}{(2n^2)^n}\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

さて，$\dfrac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{(3n^2)^n}=\dfrac{3n^2+1}{3n^2}\cdot\dfrac{3n^2+2}{3n^2}\cdots\dfrac{3n^2+n}{3n^2}=\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{3n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{3n^2}\right)$

$$\log\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{(3n^2)^n}=\sum_{k=1}^{n}\log\Bigl(1+\frac{k}{3n^2}\Bigr)\to\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{6}\quad(n\to\infty)$$

また，$\dfrac{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}{(2n^2)^n}=\dfrac{2n^2+1}{2n^2}\cdot\dfrac{2n^2+2}{2n^2}\cdots\dfrac{2n^2+n}{2n^2}=\Bigl(1+\dfrac{1}{2n^2}\Bigr)\Bigl(1+\dfrac{2}{2n^2}\Bigr)\cdots\Bigl(1+\dfrac{n}{2n^2}\Bigr)$

$$\log\frac{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}{(2n^2)^n}=\sum_{k=1}^{n}\log\Bigl(1+\frac{k}{2n^2}\Bigr)\to\frac{1}{2\cdot2}=\frac{1}{4}\quad(n\to\infty)$$

⑤より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log J(n)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$ となり，対数関数は連続関数なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\Bigl(\frac{2}{3}\Bigr)^n=\lim_{n\to\infty}J(n)=e^{-\frac{1}{12}}$$

［解 説］

微分を利用した不等式の証明と数列の極限の融合問題です。(1)から(2)への誘導はスムーズですが, (2)から(3)への誘導には飛躍が少しあります。やや難のレベルですが, 要演習の１題です。