1　　解答解説のページへ

四面体 OABC の辺 OA を $y:(1-y)$ に内分する点を D，辺 AB を $(1-x):x$ に内分する点を E，辺 BC を $(1-y):y$ に内分する点を F とする。ただし，x，y は $0<x<1$，$0<y<1$ を満たすものとする。3 点 D, E, F を通る平面と直線 OC の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x, y を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}$ を満たす t の値を x を用いて表せ。

(3)　辺の長さに関して，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ が成り立つとする。$\mathrm{OA}=h$，$\mathrm{OA}:\mathrm{AB}=1:k$ として，線分 EG の長さを最小にする x の値を k を用いて表せ。また，そのときの線分 EG の長さを h と k を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときの m の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた m_0 に対して，方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3)　次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

　方程式 $70x+130y=m$ は，x, y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

3

解答解説のページへ

n を正の整数とする。3 種類の数字 1, 2, 3 を並べて，各位の数が 1, 2, 3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。次の問いに答えよ。

(1)　各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。y_n+x_n，y_n-x_n および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(2)　各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とするとき，z_n の値を n を用いて表せ。

(3)　y_n，z_n は(1), (2)で求めたものとする。初項 c_1 は 0 でないとして，次の条件を満たす等比数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

数列 $\left\{ c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が 0 でない値に収束する。

4

解答解説のページへ

n を 0 以上の整数とし，次の式で I_n を定める。

$$I_0=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx\,,\ \ I_n=\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}\,dx\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1 および I_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$ の値を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^n}=\infty$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^{2n}}=0$ が成り立つことを証明せよ。

5

解答解説のページへ

複素数を極形式で表したときの偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にとる。3 以上の整数 n に対して，方程式 $z^n = i$ の解を極形式で表したとき，偏角の小さい順に α_0，α_1，…，α_{n-1} とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，α_k を極形式で表せ。

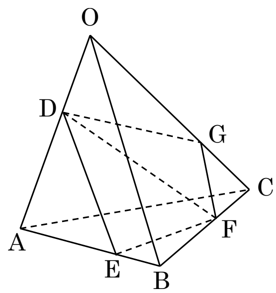
(2)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$\alpha_k = \alpha_0\beta_k$，$(\beta_k)^n = 1$ を同時に満たす複素数 β_k が存在することを証明せよ。

(3)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$\gamma_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ とする。また，γ_k を表す複素数平面上の点を P_k とする。このとき，P_0，P_1，P_2，…，P_{n-1} を頂点とする多角形は正 n 角形であることを証明せよ。

(4)　$n = 6$ とし，(3)で求めた正六角形の頂点 P_0，P_1，P_2，…，P_5 を通る円の中心が表す複素数を求めよ。ただし，求めた答えの複素数には極形式を使わないこと。

1

問題のページへ



(1) 四面体 OABC に対して，$\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=y:(1-y)$，$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=(1-x):x$，$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}=(1-y):y$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=x\vec{a}+(1-x)\vec{b}-y\vec{a}=(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=y\vec{b}+(1-y)\vec{c}-y\vec{a}=-y\vec{a}+y\vec{b}+(1-y)\vec{c}$$

(2) 3 点 D, E, F を通る平面と直線 OC の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=t\vec{c}-y\vec{a}=-y\vec{a}+t\vec{c}$ ………①

また，p, q を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=p\overrightarrow{\mathrm{DE}}+q\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=p\{(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}\}+q\{-y\vec{a}+y\vec{b}+(1-y)\vec{c}\}$$

$$=\{p(x-y)-qy\}\vec{a}+\{p(1-x)+qy\}\vec{b}+q(1-y)\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①②から，

$$-y=p(x-y)-qy\ \cdots\cdots③,\quad 0=p(1-x)+qy\ \cdots\cdots④,\quad t=q(1-y)\ \cdots\cdots⑤$$

③④より，$-y=p(1-y)$ から $p=-\dfrac{y}{1-y}$ となり，$q=-\dfrac{1-x}{y}\left(-\dfrac{y}{1-y}\right)=\dfrac{1-x}{1-y}$

すると，⑤に代入して，$t=\dfrac{1-x}{1-y}\cdot(1-y)=1-x$ となる。

(3) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=h$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=kh$ のとき，余弦定理より，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{h^2+h^2-(kh)^2}{2}=\frac{(2-k^2)h^2}{2}$$

さて，(2)から $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-x)\vec{c}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2=x^2h^2+2(1-x)^2h^2+2x(1-x)\vec{a}\cdot\vec{b}-2(1-x)^2\vec{b}\cdot\vec{c}-2x(1-x)\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=(3x^2-4x+2)h^2-(1-x)^2(2-k^2)h^2=h^2\{(k^2+1)x^2-2k^2x+k^2\}$$

$$=h^2\left\{(k^2+1)\left(x-\frac{k^2}{k^2+1}\right)^2+\frac{k^2}{k^2+1}\right\}$$

すると，線分 EG の長さは，$x=\dfrac{k^2}{k^2+1}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{k^2h^2}{k^2+1}}=\dfrac{kh}{\sqrt{k^2+1}}$ をとる。

［解 説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。標準的な内容ですが，(3)では，計算がやや面倒です。

2

問題のページへ

(1)　方程式$70x+130y=m$……①が整数解をもつとき，$70x+130y$は 10 の倍数であるので，正の整数 m は 10 の倍数になる。

そこで，最小の 10 の倍数$m=10$のときを調べると，①から，

$$70x+130y=10\,,\ \ 7x+13y=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②を満たす整数解$(x,\ y)=(2,\ -1)$が存在することより，m の最小値m_0は$m_0=10$となる。

(2)　(1)から，$7\times2+13\times(-1)=1$……③となり，②③より，

$$7(x-2)+13(y+1)=0\,,\ \ 7(x-2)=-13(y+1)$$

7 と 13 は互いに素なので，k を整数として，$(x-2,\ y+1)=(-13k,\ 7k)$となり，

$$x=-13k+2\,,\ \ y=7k-1$$

(3)　l を正の整数として，$m=10l$のとき，①から，

$$70x+130y=10l\,,\ \ 7x+13y=l\ \cdots\cdots\cdots④$$

④を満たす整数解$(x,\ y)=(2l,\ -l)$をとると，$7\cdot2l+13\cdot(-l)=l$から，

$$7(x-2l)+13(y+l)=0\,,\ \ 7(x-2l)=-13(y+l)$$

(2)と同様に，k を整数として，$(x-2l,\ y+l)=(-13k,\ 7k)$となり，

$$x=-13k+2l\,,\ \ y=7k-l\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$x\geqq1$，$y\geqq1$なので，⑤から$-13k+2l\geqq1$かつ$7k-l\geqq1$となり，

$$\frac{l+1}{7}\leqq k\leqq\frac{2l-1}{13}\cdots\cdots\cdots⑥$$

さらに，⑤を満たす$(x,\ y)$が 3 組存在，すなわち⑥を満たす k が 3 個存在するためには，$\dfrac{2l-1}{13}-\dfrac{l+1}{7}\geqq2$であることが必要であり，

$$7(2l-1)-13(l+1)\geqq182\,,\ \ l\geqq182+7+13=202$$

そこで，$l=202$のときを調べると，⑥は$29\leqq k\leqq31$となり，整数 k は 29，30，31 と 3 個存在する。

したがって，条件を満たす l の最小値は 202 となり，求める m の最小値は，

$$m=10\times202=2020$$

［解 説］

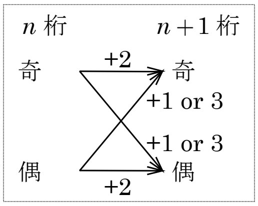
不定方程式の問題です。(1)と(2)は定番ですが，(3)は(2)をベースとしたひねりが加えられています。

3

問題のページへ

(1)　数字 1, 2, 3 を重複を許して並べ, n 桁の整数を作る。

そして, 各位の数の合計が奇数, 偶数になる整数の総数を, それぞれ x_n, y_n とすると, $x_1=2$, $y_1=1$ のもとで,



$$x_{n+1}=x_n+2y_n\cdots\cdots\cdots①,\quad y_{n+1}=2x_n+y_n\cdots\cdots\cdots②$$

②＋①から, $y_{n+1}+x_{n+1}=3x_n+3y_n=3(y_n+x_n)$ となり,

$$y_n+x_n=(y_1+x_1)\cdot 3^{n-1}=3^n\cdots\cdots\cdots③$$

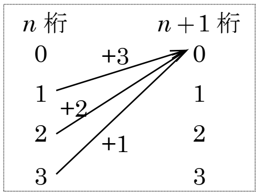
②－①から, $y_{n+1}-x_{n+1}=x_n-y_n=-(y_n-x_n)$ となり,

$$y_n-x_n=(y_1-x_1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n\cdots\cdots\cdots④$$

③＋④から, $2y_n=3^n+(-1)^n$ となり, $y_n=\dfrac{1}{2}\{3^n+(-1)^n\}$ である。

(2)　各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とする。

ここで, 各位の数の合計を 4 で割った余りに着目すると, $n+1$ 桁の整数の各位の数の合計が 4 の倍数になるのは, n 桁の整数の各位の数の合計が 4 の倍数でない各々の場合について 1 通りずつとなる。そして, n 桁の整数が $y_n+x_n=3^n$ 個あることに注意すると,



$$z_{n+1}=1\cdot(3^n-z_n)=-z_n+3^n\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで, ⑤を満たす数列の 1 つとして, $z_n=\alpha\cdot 3^n$ (α は定数)をとると,

$$\alpha\cdot 3^{n+1}=-\alpha\cdot 3^n+3^n,\quad 3\alpha=-\alpha+1$$

これより $\alpha=\dfrac{1}{4}$ となるので, $\dfrac{1}{4}\cdot 3^{n+1}=-\dfrac{1}{4}\cdot 3^n+3^n\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より, $z_{n+1}-\dfrac{1}{4}\cdot 3^{n+1}=-\left(z_n-\dfrac{1}{4}\cdot 3^n\right)$ となり, $z_1=0$ から,

$$z_n-\frac{1}{4}\cdot 3^n=\left(z_1-\frac{1}{4}\cdot 3^1\right)(-1)^{n-1}=\frac{3}{4}(-1)^n$$

よって, $z_n=\dfrac{1}{4}\{3^n+3\cdot(-1)^n\}$ である。

(3)　(1)(2)から, $\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3^n+3\cdot(-1)^n}{3^n+(-1)^n}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\cdot(-1)^n}{3^n+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$

また, 等比数列 $\{c_n\}$ の初項 $c_1\neq 0$, 公比 r とすると, $c_n=c_1r^{n-1}$

そこで, $a_n=c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと, $r\neq 0$ で,

$$a_n=c_1r^{n-1}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n+(-1)^n}=\frac{c_1}{r}\cdot\frac{(-r)^n}{3^n+(-1)^n}=\frac{c_1}{r}\cdot\frac{\left(-\frac{r}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

すると, a_n が 0 でない値に収束する条件は, $-\dfrac{r}{3}=1$ すなわち $r=-3$ である。

なお，$r=0$ のときは $c_n=0$ $(n \geqq 2)$ となり，適さない。

［解 説］

場合の数と漸化式の融合問題です。(1)は誘導に従って y_n を求めましたが，(2)と同様に隣接 2 項間型の漸化式を立式して求める方法もあります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$I_0=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ は，半径 2 の半円の面積が対応するので，$I_0=\frac{1}{2}\cdot 2^2\pi=2\pi$

$I_1=\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$ に対し，$f_1(x)=x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数なので，$I_1=0$ である。

また，$I_2=\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ に対し，部分積分を適用すると，

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x\cdot(-2x)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\,x\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\Big]_{-2}^{2}+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{4}{3}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{1}{3}\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}I_0-\frac{1}{3}I_2=\frac{8}{3}\pi-\frac{1}{3}I_2$$

これより，$\frac{4}{3}I_2=\frac{8}{3}\pi$ となるので，$I_2=2\pi$ である。

(2)　$I_{2n+2}=\int_{-2}^{2}x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ に対し，部分積分を適用すると，

$$I_{2n+2}=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^{2n+1}\cdot(-2x)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\,x^{2n+1}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\Big]_{-2}^{2}+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2n+1)x^{2n}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2n+1}{3}\int_{-2}^{2}x^{2n}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}(2n+1)\int_{-2}^{2}x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{1}{3}(2n+1)\int_{-2}^{2}x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}(2n+1)I_{2n}-\frac{1}{3}(2n+1)I_{2n+2}$$

これより，$(3+2n+1)I_{2n+2}=4(2n+1)I_{2n}$ となるので，

$$I_{2n+2}=\frac{4(2n+1)}{2n+4}I_{2n}=\frac{2(2n+1)}{n+2}I_{2n}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\frac{2(2n+1)}{n+2}$ である。

(3)　$J_n=\frac{I_{2n}}{2^n}$ とおくと，$(*)$より，$J_{n+1}=\frac{I_{2n+2}}{2^{n+1}}=\frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot\frac{I_{2n}}{2^{n+1}}=\frac{2n+1}{n+2}J_n$

ここで，$\frac{2n+1}{n+2}=2-\frac{3}{n+2}$ から，$n\geqq 2$ において $\frac{2n+1}{n+2}\geqq\frac{5}{4}$ となり，

$$J_{n+1}\geqq\frac{5}{4}J_n\quad(n\geqq 2)$$

これより，$J_n\geqq J_2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-2}=\frac{I_4}{2^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{3}I_2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-2}=\pi\left(\frac{5}{4}\right)^{n-2}$

すると，$n\to\infty$ のとき $\pi\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-2}\to\infty$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}J_n=\infty$

また，$K_n=\dfrac{I_{2n}}{2^{2n}}$ とおくと，$(*)$より，

$$K_{n+1}=\frac{I_{2n+2}}{2^{2n+2}}=\frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot\frac{I_{2n}}{2^{2n+2}}=\frac{2n+1}{2n+4}K_n<\frac{2n+1}{2n+3}K_n$$

これより，$K_n>0$ なので，$n\geqq 1$ において，

$$0<K_n<\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdot\frac{2n-5}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}K_0=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{I_0}{2^0}=\frac{2\pi}{2n+1}$$

すると，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{2\pi}{2n+1}\to 0$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^{2n}}=\lim_{n\to\infty}K_n=0$

［解　説］

定積分を題材とした漸化式と極限の問題です。(1)の I_2 については，(2)の設問をみて部分積分を利用しています。また，(3)の後半の極限については，前半と同じ方法ではうまくいかなかったので，係数を少し操作をしました。

5

問題のページへ

(1)　方程式$z^n=i$の解を$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$とおくと,

$$r^n=1,\ n\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{4k+1}{2}\pi\quad(k\text{は整数})$$

これより$r=1$となり，また$0\leqq n\theta<2n\pi$から，$0\leqq k\leqq n-1$で$\theta=\dfrac{4k+1}{2n}\pi$と表すことができる。そして，偏角の小さい順に$z=\alpha_0$，$\alpha_1$，…，$\alpha_{n-1}$とおくと,

$$\alpha_k=\cos\frac{4k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{4k+1}{2n}\pi\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

(2)　α_kの偏角が$\dfrac{4k+1}{2n}\pi=\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{2k\pi}{n}$と表されることより,

$$\alpha_k=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=\alpha_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

ここで，$\beta_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$とすると，$\alpha_k=\alpha_0\beta_k$を満たし,

$$(\beta_k)^n=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$$

(3)　まず，$\beta=\beta_1$とおくと$\beta=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$となり，$\beta_k=\beta^k$から,

$$\alpha_k=\alpha_0\beta^k\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

ここで，$\gamma_k=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$であるので,

$$\gamma_k=\alpha_0+\alpha_0\beta+\alpha_0\beta^2+\cdots+\alpha_0\beta^k=\alpha_0(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^k)$$

さて，複素数平面上で，$\mathrm{P}_0(\gamma_0)$，$\mathrm{P}_1(\gamma_1)$，$\mathrm{P}_2(\gamma_2)$，…，$\mathrm{P}_{n-1}(\gamma_{n-1})$を頂点とする多角形に対して,

$$\gamma_1-\gamma_0=\alpha_0\beta,\ \gamma_2-\gamma_1=\alpha_0\beta^2,\ \gamma_3-\gamma_2=\alpha_0\beta^3,\ \cdots,\ \gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}=\alpha_0\beta^{n-1}$$

$$\gamma_2-\gamma_1=\beta(\gamma_1-\gamma_0),\ \gamma_3-\gamma_2=\beta(\gamma_2-\gamma_1),\ \cdots,\ \gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}=\beta(\gamma_{n-2}-\gamma_{n-3})$$

すると，一般的に,

$$\gamma_{k+2}-\gamma_{k+1}=\beta(\gamma_{k+1}-\gamma_k)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-3)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n\geqq3$より$\beta\neq1$となり，$\beta^n=(\beta_1)^n=1$から,

$$\gamma_{n-1}=\alpha_0(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{n-1})=\alpha_0\cdot\frac{1-\beta^n}{1-\beta}=0\cdots\cdots\cdots②$$

これより，$\gamma_{n-1}+\beta(\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2})=0+\beta\cdot\alpha_0\beta^{n-1}=\alpha_0\beta^n=\alpha_0=\gamma_0$となり,

$$\gamma_0-\gamma_{n-1}=\beta(\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2})\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$|\beta|=1$，$\arg\beta=\dfrac{2\pi}{n}$に注意すると，①から$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-3$のとき$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}$を$\dfrac{2\pi}{n}$だけ回転すると$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}}$になり，③から$\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$を$\dfrac{2\pi}{n}$だけ回転すると$\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_0}$になる。

したがって，P_0，P_1，P_2，…，P_{n-1}を頂点とする多角形は，各辺の長さが等しく，かつ外角がすべて$\dfrac{2\pi}{n}$より，正n角形となる。

(4)　$n=6$ のとき，正六角形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ の外接円の中心は，線分 P_2P_5 の中点である。
さて，②から $\gamma_5=0$ なので，求める中心を表す複素数を γ とすると，

$$\gamma=\frac{\gamma_2}{2}=\frac{1}{2}\alpha_0(1+\beta+\beta^2)=\frac{1}{2}\alpha_0\cdot\frac{1-\beta^3}{1-\beta}$$

ここで，$\beta=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ から，$\beta^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ となり，

$$\frac{1-\beta^3}{1-\beta}=\frac{2}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

また，$\alpha_0=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ なので，

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi$$

さらに，$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

したがって，$\gamma=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$ である。

［解　説］

複素数平面上の方程式の解とついての問題です。質と量ともにハードです。(3)では和が設定されているので，それを等比数列の和に対応させる方法をとっています。なお，詰めの作業は面倒でした。