1

解答解説のページへ

n を正の整数とする。3 種類の数字 1, 2, 3 を並べて, 各位の数が 1, 2, 3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし, 使わない数字があってもよい。各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n , 各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。また, 各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とする。次の問いに答えよ。

(1) n を 2 以上の整数とするとき,

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}\,,\quad y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1}$$

を満たす定数 a, b, c, d の値をそれぞれ求めよ。

(2) $y_n + x_n$, $y_n - x_n$ および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(3) z_n の値を n を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

正四面体 OABC の辺 OA を $2:1$ に内分する点を D, 辺 AB を $(1-x):x$ に内分する点を E, 辺 BC を $1:2$ に内分する点を F とする。ただし, x は $0<x<1$ を満たす。3 点 D, E, F を通る平面と直線 OC の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および x を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}$ を満たす t の値を x を用いて表せ。

(3) 線分 EG の長さを最小にする x の値を求めよ。また, 線分 EG の長さの最小値は辺 OA の長さの何倍であるか求めよ。

3　　解答解説のページへ

放物線に関する次の問いに答えよ。

(1)　正の整数の組$(m,\ n)$に対して，次の条件を考える。

放物線$y=mx^2-6x+n$は，x軸と$0<x<\dfrac{3}{2}$の範囲で相異なる 2 点で交わる。

この条件を満たす正の整数の組$(m,\ n)$のうちで，$m+n$の値が最小になるのは，$(4,\ 1)$のときであることを証明せよ。

(2)　2 つの放物線$y=4x^2-6x+1$と$y=x^2-6x+4$の両方に接する直線は 2 本ある。それらの直線の方程式を求めよ。

(3)　不等式$x>0$で表される領域において，(2)の 2 つの放物線と(2)で求めた直線のうちの 1 本で囲まれた部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

単位円 $x^2+y^2=1$ 上を動く点 Q の座標を $(X,\ Y)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　x 軸の正の部分に始線をとり，点 Q が一般角 θ の動径上にあるとき，$X,\ Y$ の値を θ を用いてそれぞれ表せ。

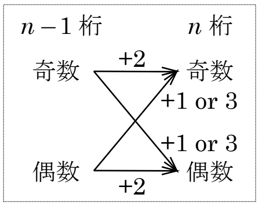
(2)　$2X+3Y$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$XY-Y^2+\dfrac{1}{2}$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。

(4)　$6X^2-3X+4Y^2$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。

1

問題のページへ



(1)　数字 1, 2, 3 を重複を許して並べ，n 桁の整数を作る。

　そして，各位の数の合計が奇数，偶数になる整数の総数を，それぞれ x_n，y_n とすると，$x_1=2$，$y_1=1$ のもとで，

$$x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\cdots\cdots①,\quad y_n=2x_{n-1}+y_{n-1}\cdots\cdots②$$

　よって，$a=1$，$b=2$，$c=2$，$d=1$ である。

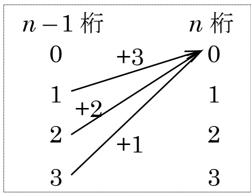
(2)　②＋①から，$y_n+x_n=3x_{n-1}+3y_{n-1}=3(y_{n-1}+x_{n-1})$ となり，

$$y_n+x_n=(y_1+x_1)\cdot 3^{n-1}=3^n\cdots\cdots\cdots③$$

　②－①から，$y_n-x_n=x_{n-1}-y_{n-1}=-(y_{n-1}-x_{n-1})$ となり，

$$y_n-x_n=(y_1-x_1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n\cdots\cdots\cdots④$$

　③＋④から，$2y_n=3^n+(-1)^n$ となり，$y_n=\dfrac{1}{2}\{3^n+(-1)^n\}$ である。



(3)　各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とする。

　ここで，各位の数の合計を 4 で割った余りに着目すると，n 桁の整数の各位の数の合計が 4 の倍数になるのは，$n-1$ 桁の整数の各位の数の合計が 4 の倍数でない各々の場合について 1 通りずつとなる。そして $n-1$ 桁の整数が $y_{n-1}+x_{n-1}=3^{n-1}$ 個あることに注意すると，

$$z_n=1\cdot(3^{n-1}-z_n)=-z_{n-1}+3^{n-1}\cdots\cdots\cdots⑤$$

　ここで，⑤を満たす数列の 1 つとして，$z_n=\alpha\cdot 3^n$（α は定数)をとると，

$$\alpha\cdot 3^n=-\alpha\cdot 3^{n-1}+3^{n-1},\quad 3\alpha=-\alpha+1$$

　これより $\alpha=\dfrac{1}{4}$ となるので，$\dfrac{1}{4}\cdot 3^n=-\dfrac{1}{4}\cdot 3^{n-1}+3^{n-1}\cdots\cdots\cdots⑥$

　⑤⑥より，$z_n-\dfrac{1}{4}\cdot 3^n=-\left(z_{n-1}-\dfrac{1}{4}\cdot 3^{n-1}\right)$ となり，$z_1=0$ から，

$$z_n-\frac{1}{4}\cdot 3^n=\left(z_1-\frac{1}{4}\cdot 3^1\right)(-1)^{n-1}=\frac{3}{4}(-1)^n$$

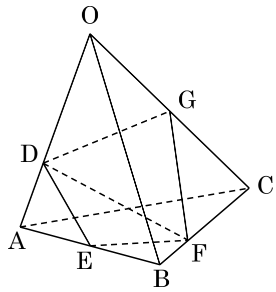
　よって，$z_n=\dfrac{1}{4}\{3^n+3\cdot(-1)^n\}$ である。

［解　説］

　場合の数と漸化式の融合問題です。(2)では誘導に従って連立漸化式を解き，y_n を求めました。

2

問題のページへ



(1)　正四面体 OABC に対して，$\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=2:1$，$0<x<1$ として $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=(1-x):x$，$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}=1:2$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=x\vec{a}+(1-x)\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}=\left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{a}+(1-x)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(2)　3 点 D, E, F を通る平面と直線 OC の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=t\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{a}+t\vec{c}$ ………①

また，p, q を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=p\overrightarrow{\mathrm{DE}}+q\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=p\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{a}+(1-x)\vec{b}\right\}+q\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$=\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)p-\frac{2}{3}q\right\}\vec{a}+\left\{(1-x)p+\frac{2}{3}q\right\}\vec{b}+\frac{1}{3}q\vec{c}\ \text{………②}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①②から，

$$-\frac{2}{3}=\left(x-\frac{2}{3}\right)p-\frac{2}{3}q\ \text{……③},\quad 0=(1-x)p+\frac{2}{3}q\ \text{……④},\quad t=\frac{1}{3}q\ \text{……⑤}$$

③④より，$-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}p$ から $p=-2$ となり，$q=-2(1-x)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=3(1-x)$

すると，⑤に代入して，$t=\frac{1}{3}\cdot3(1-x)=1-x$ となる。

(3)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=h$ とおくと，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=h$ となり，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=h^2\cos60^\circ=\frac{1}{2}h^2$$

さて，(2)から $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-x)\vec{c}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2=\{x^2+2(1-x)^2\}h^2+\{2x(1-x)-2(1-x)^2-2x(1-x)\}\cdot\frac{1}{2}h^2$$

$$=(3x^2-4x+2)h^2-(1-2x+x^2)h^2=h^2(2x^2-2x+1)$$

$$=h^2\left\{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}$$

すると，線分 EG の長さは，$x=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{h^2}{2}}=\frac{h}{\sqrt{2}}$ をとり，この最小値は辺 OA の長さの $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍となる。

［解　説］

標準的な内容の空間ベクトルの四面体への応用問題です。

3

問題のページへ

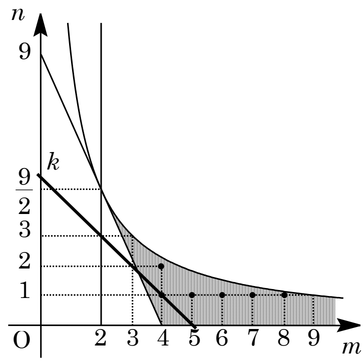
(1)　正の整数 m, n に対し，$f(x)=mx^2-6x+n=m\left(x-\dfrac{3}{m}\right)^2-\dfrac{9}{m}+n$ とおく。

ここで，放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $0<x<\dfrac{3}{2}$ の範囲で相異なる 2 点で交わる条件は，$f(0)=n>0$，$\dfrac{3}{m}>0$ に注意すると，

$$-\frac{9}{m}+n<0,\ \frac{3}{m}<\frac{3}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}m-9+n>0$$

まとめると，$m>2$，$-\dfrac{9}{4}m+9<n<\dfrac{9}{m}$ となり，これを満たす点 $(m,\ n)$ を図示すると，右図の網点部内の 6 つの格子点となる。

すると，$m+n=k$ とおいたとき，k の値が最小になるのは，右図から $(m,\ n)=(4,\ 1)$ の場合である。



(2)　2 つの放物線 $y=4x^2-6x+1$ ……①と $y=x^2-6x+4$ ……②の両方に接する直線を $y=ax+b$ ……③とおく。

まず，①③を連立して，$4x^2-(a+6)x+1-b=0$ ……④となり，

$D=(a+6)^2-16(1-b)=0$ ………⑤

また，②③を連立して，$x^2-(a+6)x+4-b=0$ ……⑥となり，

$D=(a+6)^2-4(4-b)=0$ ………⑦

⑤⑦より $16(1-b)=4(4-b)$ となるので $b=0$ から，$(a+6)^2=16$

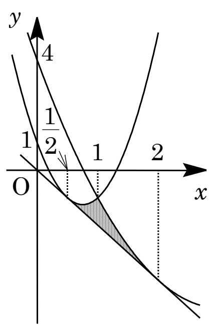
$a+6=\pm4$，$a=-10,\ -2$

よって，③から求める直線は，$y=-10x$ または $y=-2x$ である。

(3)　④の重解は $x=\dfrac{a+6}{8}$，⑥の重解は $x=\dfrac{a+6}{2}$ であり，ともに $x>0$ であるのは，$a=-2$ である。このとき，④から $x=\dfrac{1}{2}$，⑥から $x=2$ となる。また，①②を連立して，$4x^2-6x+1=x^2-6x+4$ となり，$x^2=1$ から $x>0$ であるのは $x=1$ である。

すると，放物線①と②，および直線 $y=-2x$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4x^2-6x+1+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-6x+4+2x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{1}^{2}(x-2)^2dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{2}$$

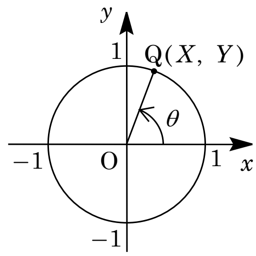


［解 説］

放物線を題材とした設問 3 題です。内容は基本的ですが，詰めの作業が必要ですので，かなりの時間が費やされます。

4

問題のページへ



(1)　単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に対し，

$$X=\cos\theta,\ Y=\sin\theta$$

(2)　$2X+3Y=2\cos\theta+3\sin\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ であり，これより，

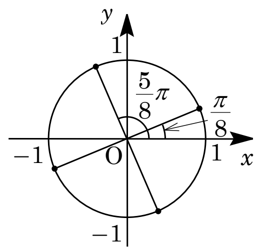
$$-\sqrt{13}\leqq 2X+3Y\leqq\sqrt{13}$$

(3)　$F=XY-Y^2+\dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$F=\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

すると，n を整数として，$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\ \left(\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{8}\right)$ のとき F は最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとり，$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi+\dfrac{3}{2}\pi\ \left(\theta=n\pi+\dfrac{5}{8}\pi\right)$ のとき F は最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。



ここで，$\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ となり，

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

これより，F が最大値をとる点 Q の座標は，

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\ （複号同順）$$

また，$\cos\dfrac{5}{8}\pi=-\sin\dfrac{\pi}{8}=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\sin\dfrac{5}{8}\pi=\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ から，F が最小値をとる点 Q の座標は，

$$\left(\mp\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\ （複号同順）$$

(4)　$G=6X^2-3X+4Y^2$ とおくと，

$$G=6\cos^2\theta-3\cos\theta+4\sin^2\theta=6\cos^2\theta-3\cos\theta+4-4\cos^2\theta$$

$$=2\cos^2\theta-3\cos\theta+4=2\left(\cos\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より，$\cos\theta=-1\ (\sin\theta=0)$ のとき G は最大値 $2+3+4=9$ をとり，$\cos\theta=\dfrac{3}{4}\ \left(\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ のとき G は最小値 $\dfrac{23}{8}$ をとる。

なお，G が最大値をとる点 Q の座標は $(-1,\ 0)$，G が最小値をとる点 Q の座標は $\left(\dfrac{3}{4},\ \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ である。

［解　説］

三角関数の最大・最小についての問題です。どの設問も基本の確認レベルですが，量的には多めです。