1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 座標平面上で，不等式$|y| \geqq |x|+x+1$の表す領域を図示せよ。

(2) a を定数とし，$f(x)=|x-2|+(a+1)x-2$とする。関数$y=f(x)$のグラフが x 軸とちょうど 2 点で交わるとする。そのとき，a の値の範囲を求め，不等式$f(x) \leqq y \leqq 0$の表す領域の面積をaで表せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

座標平面上に放物線$C_1: y = x^2$と$C_2: y = x^2 + c^2$を考える。ただし, cは正の定数とする。C_1上の点$(a,\ a^2)$からC_2に接線l_1, l_2を引き, 接点の x 座標をそれぞれb_1, b_2 $(b_1 < b_2)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a - b_1 = b_2 - a = c$が成り立つことを示せ。

(2)　C_2と接線l_1, l_2で囲まれた部分の面積をcで表せ。

3

解答解説のページへ

座標空間において，1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG をなす 8 つの頂点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0) および D(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1) をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 P(s, 0, 1) ($0\leqq s\leqq 1$)，辺 CB 上に点 Q(t, 1, 0) ($0\leqq t\leqq 1$) をとり，3 点 O, P, Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また四角形 OPRQ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ および s, t で表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s, t で表せ。また，U を s, t で表せ。

(3)　点 R が辺 GF 上にあるとき，U の最大値，最小値を求めよ。またそのときの s，t の値を求めよ。

4　解答解説のページへ

多項式$P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$について，次の問いに答えよ。ただし，$n$は2以上の整数とする。

(1)　$Q(t)=P(t+1)$とおく。多項式$Q(t)$の定数項，tの係数およびt^2の係数は0であることを示せ。

(2)　$P(x)$は$(x-1)^3$で割り切れるが，$(x-1)^4$では割り切れないことを示せ。

(3)　方程式$P(x)=0$の整数解は1および-1のみであることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　不等式$|y| \geqq |x| + x + 1$……(＊)に対して，

(i)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき　$y \geqq x + x + 1$ より $y \geqq 2x + 1$

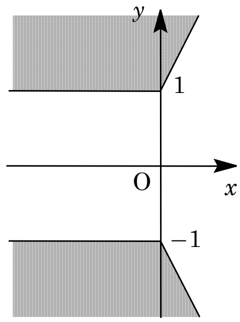
(ii)　$x < 0$，$y \geqq 0$ のとき　$y \geqq -x + x + 1$ より $y \geqq 1$

(iii)　$x < 0$，$y < 0$ のとき　$-y \geqq -x + x + 1$ より $y \leqq -1$

(iv)　$x \geqq 0$，$y < 0$ のとき　$-y \geqq x + x + 1$ より $y \leqq -2x - 1$

(i)～(iv)より，(＊)の表す領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。



(2)　$f(x) = |x - 2| + (a + 1)x - 2$ に対して，

(i)　$x \geqq 2$ のとき　$f(x) = x - 2 + (a + 1)x - 2 = (a + 2)x - 4$

(ii)　$x < 2$ のとき　$f(x) = -x + 2 + (a + 1)x - 2 = ax$

さて，関数 $y = f(x)$ のグラフが x 軸とちょうど 2 点で交わるには，$x < 2$ では x 軸と原点で交わることに注意して，

(a)　$a > 0$ のとき

$x \geqq 2$ で点$(2,\ 2a)$を通る傾き $a + 2 > 0$ の直線となるので適さない。

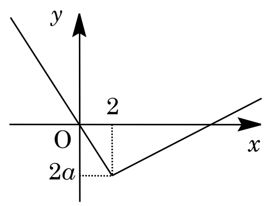
(b)　$a = 0$ のとき　$x < 2$ で $f(x) = 0$ より適さない。

(c)　$a < 0$ のとき

$x \geqq 2$ で点$(2,\ 2a)$を通る傾き $a + 2$ の直線より，$a + 2 > 0$ が必要である。

(a)(b)(c)より，$-2 < a < 0$ であることが必要である。

このとき，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになり，x 軸とちょうど 2 点で交わり，求める条件は $-2 < a < 0$ である。



このとき，$x \geqq 2$ における x 軸との交点は，

$$(a + 2)x - 4 = 0,\quad x = \frac{4}{a + 2}$$

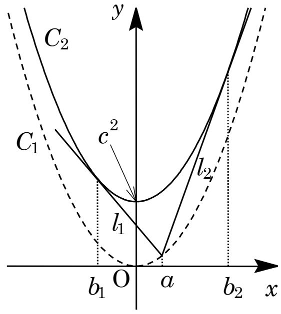
すると，$f(x) \leqq y \leqq 0$ の表す領域の面積は，$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{a + 2} \cdot (-2a) = -\dfrac{4a}{a + 2}$ である。

［解　説］

絶対値の処理がポイントになる問題です。(2)は，やや書きにくいので，まず必要条件を求める方法で記述しました。

2

問題のページへ



(1)　放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 + c^2$ に対して，C_2 上の点 $(t,\ t^2 + c^2)$ における接線の方程式は，$y' = 2x$ より，

$$y - (t^2 + c^2) = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 + c^2$$

この接線が C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ を通ることより，

$$a^2 = 2ta - t^2 + c^2,\quad t^2 - 2at + a^2 - c^2 = 0$$

すると，$t^2 - 2at + (a + c)(a - c) = 0$ より，

$$(t - a + c)(t - a - c) = 0$$

よって，$t = a - c,\ a + c$ となり，$c > 0$ から $a - c < a + c$

これより，$b_1 = a - c$，$b_2 = a + c$ となり，$a - b_1 = b_2 - a = c$ が成り立つ。

(2)　$l_1 : y = 2b_1x - b_1^2 + c^2$，$l_2 : y = 2b_2x - b_2^2 + c^2$ となり，C_2 と接線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_{b_1}^{a} (x^2 + c^2 - 2b_1x + b_1^2 - c^2)\,dx + \int_{a}^{b_2} (x^2 + c^2 - 2b_2x + b_2^2 - c^2)\,dx$$

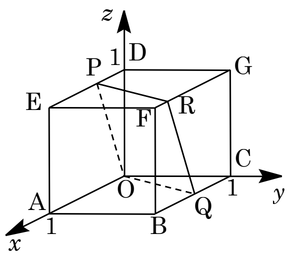
$$= \int_{b_1}^{a} (x - b_1)^2\,dx + \int_{a}^{b_2} (x - b_2)^2\,dx = \frac{1}{3}\Big[\,(x - b_1)^3\,\Big]_{b_1}^{a} + \frac{1}{3}\Big[\,(x - b_2)^3\,\Big]_{a}^{b_2}$$

$$= \frac{1}{3}(a - b_1)^3 - \frac{1}{3}(a - b_2)^3 = \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{3}(-c)^3 = \frac{2}{3}c^3$$

［解　説］

定積分と面積についての頻出題です。

$\boxed{3}$ 問題のページへ



(1)　右図の 1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG に対し，DE 上に $P(s,\ 0,\ 1)\ (0 \leqq s \leqq 1)$，辺 CB 上に $Q(t,\ 1,\ 0)\ (0 \leqq t \leqq 1)$ をとり，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$，$\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \vec{d} + s\vec{a} \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} = \vec{c} + t\vec{a} \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，k を実数として，$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GR} = \vec{c} + \vec{d} + k\vec{a}$ とすると，①②より，

$$\overrightarrow{OR} = (\overrightarrow{OQ} - t\vec{a}) + (\overrightarrow{OP} - s\vec{a}) + k\vec{a} = (k - t - s)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \cdots\cdots\cdots ③$$

R は 3 点 O, P, Q を含む平面上にあるので，$k - t - s = 0\ (k = s + t)$ となり，

$$\overrightarrow{OR} = (s + t)\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} \cdots\cdots\cdots ④$$

(2)　$|\vec{a}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$，$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} = 0$ であるので，

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (s\vec{a} + \vec{d}) \cdot (t\vec{a} + \vec{c}) = st \cdot 1^2 = st$$

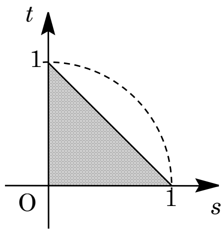
③から $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ なので，四角形 OPRQ は平行四辺形であり，面積 U は，

$$U = 2(\triangle OPQ) = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} = \sqrt{(s^2 + 1)(t^2 + 1) - (st)^2}$$

$$= \sqrt{s^2 + t^2 + 1}$$

(3)　点 R が辺 GF 上にあるとき，④から $\overrightarrow{OR} = (s + t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG}$ と表せるので，

$$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq s + t \leqq 1$$



この不等式の表す領域を st 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

そして，この領域内の点で，原点からの距離の 2 乗 $s^2 + t^2$ が最大になるのは $(s,\ t) = (1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のときで，このとき U は最大値 $\sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$ をとる。

また，$s^2 + t^2$ が最小になるのは $(s,\ t) = (0,\ 0)$ のときで，このとき U は最小値 $\sqrt{0 + 0 + 1} = 1$ をとる。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用に，領域と最大・最小のテーマを組み合わせた問題です。なお，(3)については 1 文字固定をして最大・最小を求める方法も考えられます。

4

問題のページへ

(1)　$P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1\ \ (n\geqq 2)$ に対して，

$$Q(t)=P(t+1)=(t+1)^{2n}-n(t+1)^{n+1}+n(t+1)^{n-1}-1$$

ここで，$Q(t)$ の定数項を a_0，t の係数を a_1 とおくと，

$$a_0=1^{2n}-n\cdot 1^{n+1}+n\cdot 1^{n-1}-1=1-n+n-1=0$$

$$a_1={}_{2n}\mathrm{C}_1\cdot 1^{2n-1}-n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_1\cdot 1^{n}+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1\cdot 1^{n-2}$$
$$=2n-n(n+1)+n(n-1)=2n-n^2-n+n^2-n=0$$

また，t^2 の係数を a_2 とおくと，$n\geqq 3$ のとき，

$$a_2={}_{2n}\mathrm{C}_2\cdot 1^{2n-2}-n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_2\cdot 1^{n-1}+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_2\cdot 1^{n-3}$$
$$=n(2n-1)-\frac{1}{2}n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$$
$$=2n^2-n-\frac{1}{2}(n^3+n^2)+\frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)=0$$

$n=2$ のとき，$Q(t)=(t+1)^4-2(t+1)^3+2(t+1)-1$ から，$a_2={}_4\mathrm{C}_2-2\cdot 3=0$

(2)　$Q(t)$ の t^3 の係数を a_3 とおくと，$n\geqq 4$ のとき，

$$a_3={}_{2n}\mathrm{C}_3\cdot 1^{2n-3}-n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_3\cdot 1^{n-2}+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_3\cdot 1^{n-4}$$
$$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n-2)-\frac{1}{6}n^2(n+1)(n-1)+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$=\frac{1}{6}n(n-1)\{4(2n-1)-n(n+1)+(n-2)(n-3)\}=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

$n=3$ のとき，$Q(t)=(t+1)^6-3(t+1)^4+3(t+1)^2-1$ から，

$$a_3={}_6\mathrm{C}_3-3\cdot{}_4\mathrm{C}_3=8$$

$n=2$ のとき，$a_3={}_4\mathrm{C}_3-2\cdot 1=2$ となり，$n\geqq 2$ において $a_3\neq 0$ であるので，

$$Q(t)=P(t+1)=a_{2n}t^{2n}+a_{2n-1}t^{2n-1}+\cdots+a_4t^4+a_3t^3$$

$x=t+1$ とおくと，$a_{2n}=1$，a_{2n-1}，…，a_4 が実数，$a_3\neq 0$ として，

$$P(x)=a_{2n}(x-1)^{2n}+a_{2n-1}(x-1)^{2n-1}+\cdots+a_4(x-1)^4+a_3(x-1)^3$$

よって，$P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れない。

(3)　方程式 $P(x)=0$ の整数解は，$x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}=1$ から，

$$x(x^{2n-1}-nx^{n}+nx^{n-2})=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，(*)を満たす整数 x は 1 の約数すなわち $x=\pm 1$ に限られる。

(2)より $P(1)=0$ となり，また $P(-1)=(-1)^{2n}-n(-1)^{n+1}+n(-1)^{n-1}-1$ から，

$$P(-1)=1-n(-1)^{n-1}+n(-1)^{n-1}-1=0$$

よって，$P(x)=0$ の整数解は 1 および -1 のみである。

［解　説］

多項式を題材にした論証問題です。(1)から(2)へはスムーズですが，(3)は……。