$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ の$\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の中心を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす実数 s, t を求めよ。

(3) 点 O を座標平面上の原点にとり，点 A の座標を $(0,\ \sqrt{7})$ とする。このとき点 B, C の座標をそれぞれ求めよ。ただし，点 B は第 1 象限にあるとする。

2

解答解説のページへ

袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず，袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

(1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が，赤玉 1 個と白玉 2 個である確率，白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。

(3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき，袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$，C$(-1,\ 0)$，P$(t,\ 0)$がある。ただし，t は正の実数である。また，線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $l: y = ax + b$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l が正方形 OABC の面積を二等分するとき，a を b を用いて表せ。

(2) 直線 l が正方形 OABC の面積を二等分し，さらに直角三角形 OAP の面積を二等分するとき，b を t を用いて表せ。

(3) $t \to +0$ および $t \to \infty$ のときの(2)で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

座標平面上の $x>0$ の領域において，２つの曲線 $C_1: y=\dfrac{\log x}{x}$ と $C_2: y=\dfrac{k}{x}$ を考える。ここで，k は正の実数である。曲線 C_1 と曲線 C_2 はただ 1 つの交点をもつので，その x 座標を a とする。a が $1<a<e$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてもよい。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C_1，曲線 C_2，直線 $x=1$ および直線 $x=e$ によって囲まれる図形の面積 S を k を用いて表せ。

(3) 面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

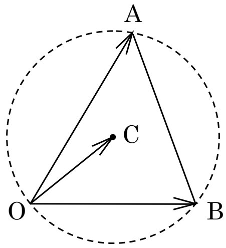
(1)　$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2)　$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| \leqq \dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ の△OAB に対して $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，△OAB に余弦定理を適用すると，

$$6=7+5-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7+5-6}{2}=3\cdots\cdots\cdots①$$

△OAB の外接円の中心 C に対し，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，

$$|\vec{c}|=|\vec{c}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|,\ |\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$$

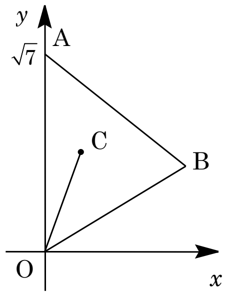
すると，$-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=0$ かつ $-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=0$ となり，$|\vec{a}|=\sqrt{7}$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{7}{2}\cdots\cdots\cdots②,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{5}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，②③から $s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7}{2}$，$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=\frac{5}{2}$ で，①より，

$$14s+6t=7,\ 6s+10t=5$$

よって，$s=\frac{5}{13}$，$t=\frac{7}{26}$ である。



(3)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ \sqrt{7})$ のとき，$\mathrm{B}(p,\ q)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$ から，

$$\sqrt{7}q=3,\ p^2+q^2=5$$

すると，$q=\frac{3}{7}\sqrt{7}$，$p>0$ から $p=\sqrt{5-\frac{9}{7}}=\sqrt{\frac{26}{7}}=\frac{\sqrt{182}}{7}$ となり，$\mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{182}}{7},\ \frac{3}{7}\sqrt{7}\right)$ である。

また，(2)から $\vec{c}=\frac{5}{13}\vec{a}+\frac{7}{26}\vec{b}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{13}(0,\ \sqrt{7})+\frac{7}{26}\left(\frac{\sqrt{182}}{7},\ \frac{3}{7}\sqrt{7}\right)=\left(\frac{\sqrt{182}}{26},\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

よって，$\mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{182}}{26},\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ である。

［解 説］

基本的な平面ベクトルの図形へ応用問題です。(1)の後半は，点 C が辺 OA と辺 OB の垂直二等分線の交点として求めることもできます。

$\boxed{2}$　　　　問題のページへ

(1)　赤玉 2 個と白玉 5 個が入っている袋 A から 3 個の玉を同時に取り出したとき，赤玉 1 個と白玉 2 個である確率を p_2，白玉 3 個である確率を p_3 とすると，

$$p_2 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{4}{7},\quad p_3 = \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{2}{7}$$

(2)　袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し，赤玉が 2 個入っている袋 B に入れた後，袋 B から 2 個の玉を取り出したとき，それが 2 個とも白玉である確率を q とする。

このとき，袋 A から袋 B には，赤玉 1 個と白玉 2 個，または白玉 3 個を取り出して入れた場合しかないので，

$$q = p_2 \times \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} + p_3 \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{2}{35} + \frac{3}{35} = \frac{1}{7}$$

(3)　袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であり，しかも袋 B に白玉が残っているのは，袋 A から白玉 3 個を取り出し袋 B に入れた場合なので，その確率は，

$$p_3 \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{35}$$

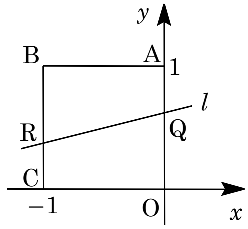
これより，袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき，袋 B に白玉が残っている条件付き確率は，(2)から，

$$\frac{3}{35} \div \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

［解 説］

基本的な確率の問題です。ミスに注意するだけです。

3　　問題のページへ



(1)　正方形 OABC の辺 OA, BC と直線 $l: y = ax + b$ との交点をそれぞれ Q, R とおくと，$\mathrm{Q}(0,\ b)$，$\mathrm{R}(-1,\ -a+b)$ となる。

ここで，l が正方形 OABC の面積を二等分することより，

$$\frac{1}{2}(b-a+b)\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2$$

すると，$-a+2b=1$ より，$a=2b-1$ ……①となる。

ただし，$0 \leqq b \leqq 1$ ……②かつ $0 \leqq -a+b \leqq 1$ ……③であり，①③をまとめると②と一致することより，求める条件は，①②より，

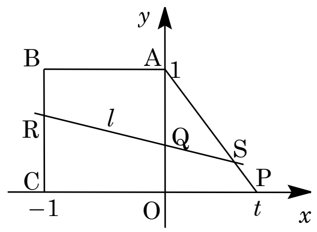
$$a = 2b-1 \quad (0 \leqq b \leqq 1) \cdots\cdots\cdots ④$$

(2)　直線 l が正方形 OABC および直角三角形 OAP の面積を二等分するとき，

(i)　直角三角形 OAP と l が辺 OP 上で交わる場合

$a<0$ から，④より $0 \leqq b < \dfrac{1}{2}$ となり，$\mathrm{OQ} < \dfrac{1}{2}$ から条件に反する。

(ii)　直角三角形 OAP と l が辺 AP 上で交わる場合



直線 AP の方程式は $x+ty=t$ となり，l と連立して，

$$x + t(ax+b) = t\,,\ (at+1)x = t(1-b)$$

$at+1=0$ のときは不成立なので，$x = \dfrac{t(1-b)}{at+1}$

すると，辺 AP と l の交点を S とおくと，④より，

$$\triangle\mathrm{AQS} = \frac{1}{2}(1-b)\cdot\frac{t(1-b)}{at+1} = \frac{t(1-b)^2}{2(at+1)} = \frac{t(1-b)^2}{2\{(2b-1)t+1\}}$$

条件より，$\dfrac{t(1-b)^2}{2\{(2b-1)t+1\}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot t\right)$ から，$2(1-b)^2 = 2bt-t+1$ となり，

$$2b^2 - 2(t+2)b + t + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$f(b) = 2b^2-2(t+2)b+t+1$ とおくと，$f(0)=t+1>0$，$f(1)=-t-1<0$

すると，$0 \leqq b \leqq 1$ を満たす⑤の解は，

$$b = \frac{t+2-\sqrt{(t+2)^2-2(t+1)}}{2} = \frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$$

(3)　(2)より，$\displaystyle\lim_{t\to+0} b = \lim_{t\to+0}\frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{t\to\infty} b = \lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)^2-(t^2+2t+2)}{2\left(t+2+\sqrt{t^2+2t+2}\right)} = \lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t+2+\sqrt{t^2+2t+2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

［解　説］

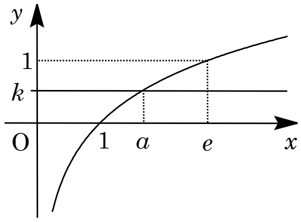
xy 平面上の図形に極限を絡めた問題です。詰めの部分がやや面倒です。

4

問題のページへ

(1)　$C_1 : y=\dfrac{\log x}{x}$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{k}{x}$ ……②を連立すると，

$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{k}{x}$，$\log x=k$ ………③



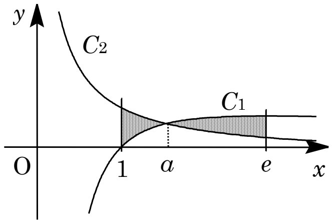
③の解が $1<x<e$ に 1 つ存在する条件は，右図より，

$0<k<1$

(2)　①より，$y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

すると，①の増減は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{x\to+0} y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=0$ に注意して曲線 C_1 の概形，および曲線 C_2 の概形を描くと右図のようになる。



さらに，③の解を $x=a$ とおくと，$\log a=k$ ……④

ここで，C_1，C_2，直線 $x=1$，$x=e$ によって囲まれる図形の面積 S は，④を用いると，

$$S=\int_1^a\left(\frac{k}{x}-\frac{\log x}{x}\right)dx+\int_a^e\left(\frac{\log x}{x}-\frac{k}{x}\right)dx$$

$$=\left[k\log x-\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^a+\left[\frac{1}{2}(\log x)^2-k\log x\right]_a^e$$

$$=k\log a-\frac{1}{2}(\log a)^2+\left(\frac{1}{2}-k\right)-\frac{1}{2}(\log a)^2+k\log a$$

$$=2k\log a-(\log a)^2+\frac{1}{2}-k=2k^2-k^2+\frac{1}{2}-k=k^2-k+\frac{1}{2}$$

(3)　(2)より，$S=\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ となり，S は $k=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

［解 説］

定積分と面積についての基本的な問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$f_n(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-(1+x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}$ ………①

(i)　$(-x)^3\neq 1\ (x\neq -1)$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=\frac{1-(-x)^{3(n+1)}}{1-(-x)^3}=\frac{1-(-1)^{3(n+1)}\cdot x^{3(n+1)}}{1+x^3}=\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{1-x+x^2}=(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(ii)　$(-x)^3=1\ (x=-1)$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=n+1$ となり，$f_n(-1)=\dfrac{1}{1+1+1}-(1-1)(n+1)=\dfrac{1}{3}$

これは，②に $x=-1$ をあてはめた値と一致する。

(i)(ii)より，$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ ………③

(2)　③より $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx$ ………④

ここで，$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$\frac{3}{4}\leqq x^2-x+1\leqq 1,\quad 1\leqq\frac{1}{x^2-x+1}\leqq\frac{4}{3}$$

すると，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\leqq\int_0^1\frac{4}{3}x^{3n+3}\,dx=\frac{4}{3}\Big[\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\Big]_0^1=\frac{4}{3(3n+4)}$ ………⑤

④⑤より，$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ ………⑥

(3)　①より，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)\,dx$ ………⑦

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)\,dx$ に注意して，I_k を

$I_k=\displaystyle\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)\,dx$ とすると，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}I_k$ となり，

$$I_k=\int_0^1(-1)^{3k}x^{3k}(1+x)\,dx=(-1)^k\int_0^1(x^{3k}+x^{3k+1})\,dx$$

$$=(-1)^k\Big[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\Big]_0^1=(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)\cdots\cdots\cdots⑧$$

また，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ と変形し，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)\,d\theta$ となり，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta=2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \cdots\cdots\cdots ⑨$$

そこで，⑦から，$\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1 f_n(x)dx$

$$\sum_{k=0}^{n} I_k=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1 f_n(x)dx$$

⑧⑨を代入すると，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi-\int_0^1 f_n(x)dx \cdots\cdots\cdots ⑩$$

さらに，⑥から，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\frac{4}{3(3n+4)}\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑩⑪より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$ である。

［解 説］

定積分と無限級数の融合問題です。(3)は唐突な印象を与えますが，(1)と(2)での巧みな誘導のため，与えられた①を 0 から 1 まで積分するという方針に混乱はないでしょう。記述量は多めですが，内容は基本の組合せとなっています。