1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ を満たす θ の値をすべて求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) 不等式 $9^x-3^x<6$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $(\log_{10}x)^2\geqq\log_{10}x^2+8$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ の△OAB の外接円の中心を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす実数 s, t を求めよ。

(3) 点 O を座標平面上の原点にとり，点 A の座標を $(0,\ \sqrt{7})$ とする。このとき点 B, C の座標をそれぞれ求めよ。ただし，点 B は第 1 象限にあるとする。

3

解答解説のページへ

袋Aには赤玉2個と白玉5個，袋Bには赤玉2個が入っている。まず，袋Aから3個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋Bから2個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

(1) 袋Aから取り出された3個の玉が，赤玉1個と白玉2個である確率，白玉3個である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 袋Bから取り出された玉が2個とも白玉である確率を求めよ。

(3) 袋Bから取り出された玉が2個とも白玉であったとき，袋Bに白玉が残っている条件付き確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。

(1) 関数 $y=\left|x^2-a^2\right|$ のグラフの概形をかけ。

(2) 定積分 $S=\displaystyle\int_0^2\left|x^2-a^2\right|dx$ を a を用いて表せ。

(3) S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

1　　　　問題のページへ

(1)　方程式$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ ……①に対して,

$$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$$

$\sin\theta-2<0$ より $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ となり，$0\leqq\theta<2\pi$ から，①の解は,

$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

(2)　不等式$9^x-3^x<6$ ……②に対し，$3^{2x}-3^x-6<0$ から,

$$(3^x+2)(3^x-3)<0$$

$3^x+2>0$ より $3^x-3<0$ すなわち$3^x<3$から，②の解は$x<1$である。

(3)　不等式$(\log_{10}x)^2\geqq\log_{10}x^2+8$ ……③に対して，$x>0$ のもとで,

$$(\log_{10}x)^2-2\log_{10}x-8\geqq0\ ,\ (\log_{10}x+2)(\log_{10}x-4)\geqq0$$

これより，$\log_{10}x\leqq-2$，$4\leqq\log_{10}x$ となり，③の解は,

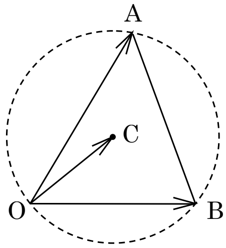
$$0<x\leqq\frac{1}{100},\ 10000\leqq x$$

［解 説］

三角方程式, および指数・対数不等式についての確認問題です。

2

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ の△OAB に対して $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，△OAB に余弦定理を適用すると，

$$6=7+5-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7+5-6}{2}=3\cdots\cdots\cdots①$$

△OAB の外接円の中心 C に対し，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，

$$|\vec{c}|=|\vec{c}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|,\ |\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$$

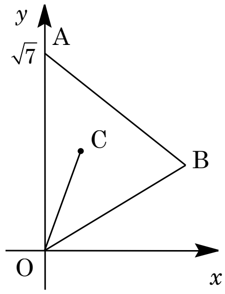
すると，$-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=0$ かつ $-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=0$ となり，$|\vec{a}|=\sqrt{7}$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{7}{2}\cdots\cdots\cdots②,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{5}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，②③から $s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{7}{2}$，$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=\dfrac{5}{2}$ で，①より，

$$14s+6t=7,\ 6s+10t=5$$

よって，$s=\dfrac{5}{13}$，$t=\dfrac{7}{26}$ である。



(3)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ \sqrt{7})$ のとき，$\mathrm{B}(p,\ q)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$ から，

$$\sqrt{7}q=3,\ p^2+q^2=5$$

すると，$q=\dfrac{3}{7}\sqrt{7}$，$p>0$ から $p=\sqrt{5-\dfrac{9}{7}}=\sqrt{\dfrac{26}{7}}=\dfrac{\sqrt{182}}{7}$ となり，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{182}}{7},\ \dfrac{3}{7}\sqrt{7}\right)$ である。

また，(2)から $\vec{c}=\dfrac{5}{13}\vec{a}+\dfrac{7}{26}\vec{b}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{13}(0,\ \sqrt{7})+\frac{7}{26}\left(\frac{\sqrt{182}}{7},\ \frac{3}{7}\sqrt{7}\right)=\left(\frac{\sqrt{182}}{26},\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

よって，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{182}}{26},\ \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ である。

［解　説］

基本的な平面ベクトルの図形へ応用問題です。(1)の後半は，点 C が辺 OA と辺 OB の垂直二等分線の交点として求めることもできます。

3

問題のページへ

(1)　赤玉 2 個と白玉 5 個が入っている袋 A から 3 個の玉を同時に取り出したとき，赤玉 1 個と白玉 2 個である確率を p_2，白玉 3 個である確率を p_3 とすると，

$$p_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{7},\quad p_3=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{2}{7}$$

(2)　袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し，赤玉が 2 個入っている袋 B に入れた後，袋 B から 2 個の玉を取り出したとき，それが 2 個とも白玉である確率を q とする。

このとき，袋 A から袋 B には，赤玉 1 個と白玉 2 個，または白玉 3 個を取り出して入れた場合しかないので，

$$q=p_2\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+p_3\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{35}+\frac{3}{35}=\frac{1}{7}$$

(3)　袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であり，しかも袋 B に白玉が残っているのは，袋 A から白玉 3 個を取り出し袋 B に入れた場合なので，その確率は，

$$p_3\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{35}$$

これより，袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき，袋 B に白玉が残っている条件付き確率は，(2)から，

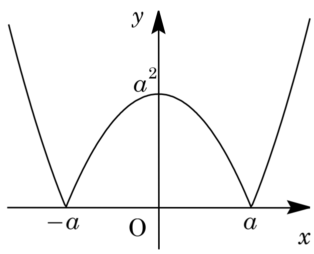
$$\frac{3}{35}\div\frac{1}{7}=\frac{3}{5}$$

［解　説］

基本的な確率の問題です。ミスに注意するだけです。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$a>0$ のとき，関数 $y=|x^2-a^2|$ に対して，

(i)　$x \leqq -a$，$a \leqq x$ のとき　$y=x^2-a^2$

(ii)　$-a<x<a$ のとき　$y=-x^2+a^2$

(i)(ii)より，$y=|x^2-a^2|$ のグラフは右図のようになる。

(2)　$S=\int_0^2 |x^2-a^2|dx$ に対して，

(i)　$0<a<2$ のとき

$$S=\int_0^a(-x^2+a^2)dx+\int_a^2(x^2-a^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+a^2x\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]_a^2$$

$$=-\frac{a^3}{3}+a^3+\frac{1}{3}(8-a^3)-a^2(2-a)=\frac{4}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$$

(ii)　$a \geqq 2$ のとき

$$S=\int_0^2(-x^2+a^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+a^2x\right]_0^2=2a^2-\frac{8}{3}$$

(3)　(i)　$0<a<2$ のとき　$S'=4a^2-4a=4a(a-1)$

(ii)　$a \geqq 2$ のとき　$S'=4a$

これより，$a>0$ における S の増減は右表のようになり，S は $a=2$ において連続なので，$a=1$ のとき最小値 2 をとる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
S'	0	$-$	0	$+$		$+$
S		$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$

［解 説］

絶対値つきの関数について，定積分を計算するという基本的な頻出題です。