

1

[解答例のページへ](#)

実数 b, c に対し、放物線 $y = f(x) = x^2 + bx + c$ が 2 点 $(p, 0), (q, 0)$ を通ると仮定する(ただし $p < q$)。また、条件 $0 < t \leq 1$ をみたす実数 t に対し実数 r, s を次のように定める。

$$r = \frac{1+t}{2}p + \frac{1-t}{2}q, \quad s = \frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $q - s, r - p, s + r, s - r$ のそれぞれを b, c, t を用いて表せ。
- (2) sr および $s^2 + r^2$ を b, c, t を用いて表せ。
- (3) 放物線 $y = f(x)$, 直線 $x = r, x = s$, および x 軸が囲む領域の面積を b, c, t を用いて表せ。

2[解答例のページへ](#)

整数 a, b, c に対し次の条件を考える。 $(*) \quad a \geq b \geq 0$ かつ $a^2 - b^2 = c$

以下の問いに答えよ。

- (1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (2) p は 3 以上の素数, n は正の整数, $c = 4p^{2n}$ とする。このとき, 条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

3

解答例のページへ

コイン①, …, ⑥が右図のようにマス目の中に置かれている。

①	②	③
④	⑤	⑥

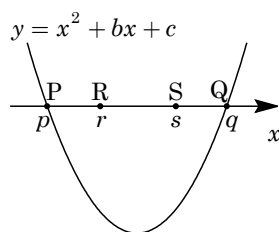
これらのコインから無作為にひとつを選び、選んだコインはそのままにし、そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える。例えば、①を選べば、②, ④を裏返し、②を選べば、①, ③, ⑤を裏返す。最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする。正の整数 n に対し、 n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) コイン①, …, ⑥をグループ A , B に分けることによって、 n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる。
 n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ、 B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。
 どのようにグループ分けすればよいかを答えよ。
- (3) p_4 を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 放物線 $y = x^2 + bx + c$ が 2 点 $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ ($p < q$) を通るとき, 2 点 $R(r, 0)$, $S(s, 0)$ をとると, 条件より,



$$r = \frac{1+t}{2}p + \frac{1-t}{2}q = \frac{(1+t)p + (1-t)q}{(1+t) + (1-t)}$$

$$s = \frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q = \frac{(1-t)p + (1+t)q}{(1-t) + (1+t)}$$

すると, $0 < t \leq 1$ から, 点 R は線分 PQ を $1-t:1+t$ に内分し, 点 S は線分 PQ を $1+t:1-t$ に内分する。ここで, $x^2 + bx + c = 0$ の解は, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ から,

$$p = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad q = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

これより, $q - p = \sqrt{b^2 - 4c}$ となり, $q - s = r - p = \frac{1-t}{2}(q - p)$ から,

$$q - s = r - s = \frac{1}{2}(1-t)\sqrt{b^2 - 4c}$$

また, $s + r = p + q = -b$, $s - r = t(q - p) = t\sqrt{b^2 - 4c}$ となる。

- (2) (1)の結果を用いて,

$$sr = \frac{1}{4}\{(s+r)^2 - (s-r)^2\} = \frac{1}{4}\{b^2 - t^2(b^2 - 4c)\} = \frac{1}{4}(1-t^2)b^2 + t^2c$$

$$s^2 + r^2 = \frac{1}{2}\{(s+r)^2 + (s-r)^2\} = \frac{1}{2}\{b^2 + t^2(b^2 - 4c)\} = \frac{1}{2}(1+t^2)b^2 - 2t^2c$$

- (3) 放物線 $y = x^2 + bx + c$, 直線 $x = r$, $x = s$, および x 軸が囲む領域の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_r^s -(x^2 + bx + c)dx = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_r^s \\ &= -\frac{s^3 - r^3}{3} - \frac{b}{2}(s^2 - r^2) - c(s - r) = -\frac{s-r}{6}\{2(s^2 + sr + r^2) + 3b(s+r) + 6c\} \end{aligned}$$

$$s^2 + sr + r^2 = \frac{1}{2}(1+t^2)b^2 - 2t^2c + \frac{1}{4}(1-t^2)b^2 + t^2c = \frac{1}{4}(3+t^2)b^2 - t^2c \text{ から,}$$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{t\sqrt{b^2 - 4c}}{6}\left\{\frac{1}{2}(3+t^2)b^2 - 2t^2c + 3b(-b) + 6c\right\} \\ &= -\frac{t\sqrt{b^2 - 4c}}{12}\{(t^2 - 3)b^2 - 4(t^2 - 3)c\} = \frac{1}{12}t(3-t^2)(\sqrt{b^2 - 4c})^3 \end{aligned}$$

[コメント]

定積分と面積の基本題です。ただ, 計算はやや面倒で, (1)と(2)で求めた値を利用することがポイントになります。

2

問題のページへ

- (1) 整数 a, b, c に対して, $a \geq b \geq 0$ かつ $a^2 - b^2 = c \cdots \cdots (*)$

このとき, $(a+b)(a-b) = c$ となり, $a+b$ と $a-b$ は c の約数である。

さらに, $a+b \geq a-b \geq 0$ であり, $(a+b) - (a-b) = 2b$ から $2b$ が偶数なので, $a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致する。

・ $c = 24$ のとき $(a+b)(a-b) = 2^3 \cdot 3$ となり, $(a+b, a-b) = (12, 2), (6, 4)$

$(*)$ をみたす (a, b) は, $(a, b) = (7, 5), (5, 1)$ である。

・ $c = 25$ のとき $(a+b)(a-b) = 5^2$ となり, $(a+b, a-b) = (25, 1), (5, 5)$

$(*)$ をみたす (a, b) は, $(a, b) = (13, 12), (5, 0)$ である。

・ $c = 26$ のとき $(a+b)(a-b) = 2 \cdot 13$ となり, みたす $(a+b, a-b)$ はない。

$(*)$ をみたす (a, b) は存在しない。

- (2) $c = 4p^{2n}$ (p は 3 以上の素数, n は正の整数) のとき, $(*)$ から

$$(a+b)(a-b) = 2^2 \cdot p^{2n} \quad (a+b \geq a-b \geq 0)$$

ここで, p は奇数から p^{2n} は奇数となり, $(*)$ をみたす $(a+b, a-b)$ はともに偶数となることより, $4p^{2n}$ を 2 つの偶数の積に分けると考えて,

$$(a+b, a-b) = (2p^{2n}, 2), (2p^{2n-1}, 2p), \cdots, (2p^n, 2p^n)$$

すると, $i = 0, 1, \cdots, n$ として, $(a+b, a-b) = (2p^{2n-i}, 2p^i)$ から,

$$(a, b) = \left(\frac{2p^{2n-i} + 2p^i}{2}, \frac{2p^{2n-i} - 2p^i}{2} \right) = (p^{2n-i} + p^i, p^{2n-i} - p^i)$$

[コメント]

約数・倍数の関係をもとにした不定方程式の問題です。 $(*)$ をみたす $a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致する点に要注目です。

3

問題のページへ

- (1) 最初、すべてのコインが表向きであったとき、与えられたコインの操作を、「選んだコイン」、そのとき「裏返すコイン」、その「回数」としてまとめると、右表のようになる。

なお、どのコインを選ぶ確率も $\frac{1}{6}$ である。

さて、2 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きとなるのは、②→⑤または⑤→②と選ぶとき、すなわち $x_2 = x_5 = 1$ のときであり、その確率 p_2 は、

$$p_2 = 2! \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

選んだ コイン	裏返す コイン	回数
①	②, ④	x_1
②	①, ③, ⑤	x_2
③	②, ⑥	x_3
④	①, ⑤	x_4
⑤	②, ④, ⑥	x_5
⑥	③, ⑤	x_6

- (2) n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるのは、

- ・ ①のコインに対して $x_2 + x_4$ が奇数………㉑
- ・ ②のコインに対して $x_1 + x_3 + x_5$ が奇数………㉒
- ・ ③のコインに対して $x_2 + x_6$ が奇数………㉓
- ・ ④のコインに対して $x_1 + x_5$ が奇数………㉔
- ・ ⑤のコインに対して $x_2 + x_4 + x_6$ が奇数………㉕
- ・ ⑥のコインに対して $x_3 + x_5$ が奇数………㉖

すると、㉒㉕から $n = (x_1 + x_3 + x_5) + (x_2 + x_4 + x_6)$ が偶数のもとで、

㉒㉖から $x_1 = (x_1 + x_3 + x_5) - (x_3 + x_5)$ は偶数となり、㉔から x_5 は奇数である。

㉒㉔から $x_3 = (x_1 + x_3 + x_5) - (x_1 + x_5)$ は偶数となる。

㉓㉕から $x_4 = (x_2 + x_4 + x_6) - (x_2 + x_6)$ は偶数となり、㉑から x_2 は奇数である。

㉑㉕から $x_6 = (x_2 + x_4 + x_6) - (x_2 + x_4)$ は偶数となる。

これより、 x_2, x_5 は奇数、 x_1, x_3, x_4, x_6 は偶数となり、逆に、このとき㉑～㉖はすべて成り立つ。

したがって、コインを $A = \{②, ⑤\}$ 、 $B = \{①, ③, ④, ⑥\}$ と分けるとき、 n 回目の操作終了時点までに、 A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ、 B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。

- (3) 4 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きとなるのは、(2)の結論から、次のようにコインが選ばれるときであり、それぞれの確率は、

(i) ②が 1 回、⑤が 3 回 ($x_2 = 1, x_5 = 3$) のとき $\frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{4}{6^4}$

(ii) ②が 3 回、⑤が 1 回 ($x_2 = 3, x_5 = 1$) のとき $\frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{4}{6^4}$

(iii) ②が 1 回, ⑤が 1 回, ①が 2 回 ($x_2 = x_5 = 1, x_1 = 2$) のとき $\frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$

(iv) ②が 1 回, ⑤が 1 回, ③が 2 回 ($x_2 = x_5 = 1, x_3 = 2$) のとき $\frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$

(v) ②が 1 回, ⑤が 1 回, ④が 2 回 ($x_2 = x_5 = 1, x_4 = 2$) のとき $\frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$

(vi) ②が 1 回, ⑤が 1 回, ⑥が 2 回 ($x_2 = x_5 = 1, x_6 = 2$) のとき $\frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$

(i)～(vi)より, $p_4 = \frac{4}{6^4} \times 2 + \frac{12}{6^4} \times 4 = \frac{56}{6^4} = \frac{7}{162}$ である。

[コメント]

記述の丁寧さが問われる確率問題です。(3)の p_4 の計算には, (2)の結論が強力な誘導になっています。