1

解答解説のページへ

実数係数の 4 次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ は相異なる複素数 α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ を解にもち，それらはすべて複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする。ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ α，β と共役な複素数を表す。

(1)　$\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ を示せ。

(2)　$t = \alpha + \overline{\alpha}$，$u = \beta + \overline{\beta}$ とおく。p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ。

(3)　座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ。

2

解答解説のページへ

$0<b<a$ とする。xy 平面において，原点を中心とする半径 r の円 C と点$(a,\ 0)$を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている。

(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ。

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする。P の x 座標 $h(r)$ を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$ をとる。D の内部にある C の弧 PQ，線分 QR，および線分 RP で囲まれる図形を A とする。xyz 空間において A を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。ただし，答えに $h(r)$ を用いてもよい。

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ。また，その r を $r(a)$ とおいたとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(r(a)-a\right)$ を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

(1)　方程式 $e^x = \dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。

(2)　$y = x(x^2-3)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点の個数を求めよ。

(3)　a を正の実数とし，関数 $f(x) = x(x^2-a)$ を考える。$y = f(x)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点は 1 個のみであるとする。このような a がただ 1 つ存在することを示せ。

4

解答解説のページへ

n を正の整数とし，n 次の整式 $P_n(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x)=\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m$ と表す。

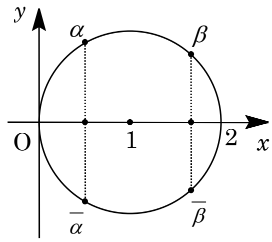
(1) 等式 $\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$ を示せ。

(2) 等式 $P_n(x+1)=\sum_{m=1}^{n}({}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_1\,x+\cdots+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_m\,x^m)$ を示せ。ただし，${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_m$ は二項係数である。

(3) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，等式 $\sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j\cdot{}_j\mathrm{C}_k={}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ を示せ。

1

問題のページへ



(1)　実数係数の 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ ……①の相異なる解 α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ は，複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるので，$|\alpha-1|=1$ より，

$$|\alpha-1|^2=1,\ (\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)=1$$

よって，$\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ ………②

(2)　(1)と同様にして，$\beta+\overline{\beta}=\beta\overline{\beta}$ ………③

さて，①の解について，$t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$ とおくと，②③より，

$$x^4-px^3+qx^2-rx+s=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$
$$=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}=(x^2-tx+t)(x^2-ux+u)$$
$$=x^4-(t+u)x^3+(t+tu+u)x^2-2tux+tu$$

よって，$p=t+u$，$q=t+tu+u$，$r=2tu$，$s=tu$ である。

(3)　まず，①の解は $\alpha\neq\overline{\alpha}$，$\beta\neq\overline{\beta}$ からすべて虚数であり，しかも $\alpha\neq\beta$，$\alpha\neq\overline{\beta}$ から $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}\neq\dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}$，すなわち $t\neq u$ となる。さらに，$0<\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}<2$，$0<\dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}<2$ から，$0<t<4$，$0<u<4$ である。

そこで，(2)から $t+u=p$，$tu=s$ なので，t と u は，X についての 2 次方程式 $X^2-pX+s=0$ の異なる 2 実数解となり，ともに 0 より大で 4 より小である。

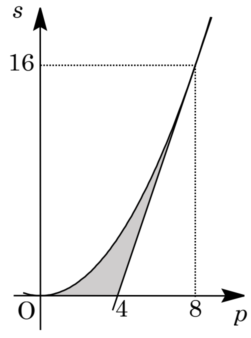
さて，$f(X)=X^2-pX+s=\left(X-\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+s$ とおくと，

$$0<\frac{p}{2}<4\ \cdots\cdots④,\quad -\frac{p^2}{4}+s<0\ \cdots\cdots⑤$$
$$f(0)=s>0\ \cdots\cdots⑥,\quad f(4)=16-4p+s>0\ \cdots\cdots⑦$$

④～⑦をまとめると，

$$0<p<8,\ 0<s<\frac{p^2}{4},\ s>4p-16$$

これより，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含まない。

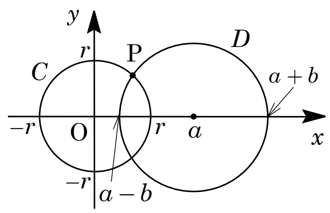


［解　説］

複素数と方程式の問題です。(2)は解と係数の関係で処理するよりは，いったん 2 次式の積として計算する方が簡単です。

2

問題のページへ



(1)　$0<b<a$ のとき，円 $C: x^2+y^2=r^2$ ……① と円 $D:(x-a)^2+y^2=b^2$ ……②が 2 点で交わる条件は，

$$|r-b|<a<r+b \cdots\cdots ③$$

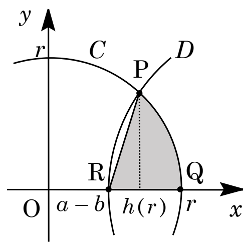
すると，$|r-b|<a$ から $b-a<r<b+a$ であるが，$0<b<a$ なので $r<b+a$ となる。

また，$a<r+b$ から $a-b<r$ となる。

よって，r の条件は，③から $a-b<r<a+b$ である。

(2)　①②の両辺の差をとると，$2ax-a^2=r^2-b^2$ より $x=\dfrac{r^2+a^2-b^2}{2a}$

これより，交点 P の x 座標を $h(r)$ とすると，$h(r)=\dfrac{r^2+a^2-b^2}{2a}$ ………(＊)



(3)　右図の網点部 A を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を $V(r)$ とし，$h(r)=p$ とおくと，

$$V_1(r)=\frac{1}{3}\pi(r^2-p^2)(p-a+b)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\{-p^3+(a-b)p^2+r^2p-(a-b)r^2\}$$
$$V_2(r)=\pi\int_p^r(r^2-x^2)dx=\pi\Big[r^2x-\frac{x^3}{3}\Big]_p^r$$
$$=\pi\Big(r^3-r^2p-\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{3}p^3\Big)=\frac{1}{3}\pi(2r^3-3r^2p+p^3)$$

すると，$V(r)=V_1(r)+V_2(r)$ なので，

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi\{-p^3+(a-b)p^2+r^2p-(a-b)r^2\}+\frac{1}{3}\pi(2r^3-3r^2p+p^3)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\{(a-b)p^2-2r^2p-(a-b)r^2+2r^3\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi\Big\{(a-b)\big(h(r)\big)^2-2r^2h(r)-(a-b)r^2+2r^3\Big\}$$

(4)　$V'(r)=\dfrac{1}{3}\pi\Big\{2(a-b)h(r)h'(r)-4rh(r)-2r^2h'(r)-2(a-b)r+6r^2\Big\}$

(＊)より，$h(r)=\dfrac{r^2+a^2-b^2}{2a}$ から $h'(r)=\dfrac{r}{a}$ となり，

$$V'(r)=\frac{1}{3}\pi\Big\{\Big(\frac{2ar-2br}{a}-4r\Big)\cdot\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}-\frac{2r^3}{a}-2(a-b)r+6r^2\Big\}$$
$$=-\frac{\pi r}{3a^2}\{(a+b)(r^2+a^2-b^2)+2ar^2+2a^2(a-b)-6a^2r\}$$
$$=-\frac{\pi r}{3a^2}\{(3a+b)r^2-6a^2r+(a-b)(3a^2+2ab+b^2)\}$$
$$=-\frac{\pi r}{3a^2}\{(3a+b)r-(3a^2+2ab+b^2)\}\{r-(a-b)\}$$

これより，$V'(r)=0$ の解は，$r=a-b,\ \dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ となる。

そして，$a-b<r<a+b$ において，

$$\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}-(a-b)=\frac{4ab+2b^2}{3a+b}>0,\ a-b<\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$$

$$\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}-(a+b)=\frac{-2ab}{3a+b}<0,\ \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}<a+b$$

以上より，$V(r)$ の増減は，右表のようになり，$r=\dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ のとき最大値をとる。

r	$a-b$	$\cdots$	$\dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$	$\cdots$	$a+b$
$V'(r)$	0	$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$r(a)=\dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ となり，

$$\lim_{a\to\infty}\left(r(a)-a\right)=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}-a\right)=\lim_{a\to\infty}\frac{ab+b^2}{3a+b}=\frac{b}{3}$$

［解　説］

微分と増減の問題ですが，量的にすさまじいものがあります。ただ，方針に迷うことはないのですが。

3

問題のページへ

(1)　方程式$e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}\ (x<0)$……①に対して，$(x-1)e^x-2x^3=0$

ここで，$g(x)=(x-1)e^x-2x^3$とおくと，①は$g(x)=0$となり，

$$g'(x)=e^x+(x-1)e^x-6x^2=xe^x-6x^2=x(e^x-6x)$$

$x<0$において，$6x<0<e^x$から$g'(x)<0$となるので，$g(x)$は単調に減少し，

$$g(0)=-e^0=-1,\ g(-1)=-2e^{-1}+2=2(1-e^{-1})>0$$

よって，①の実数解の個数は1個である。

(2)　$y=x(x^2-3)$と$y=e^x$のグラフの$x<0$における共有点の個数は，方程式$e^x=x(x^2-3)\ (x<0)$……②の実数解の個数に対応する。

②より，$\dfrac{e^x}{x}=x^2-3$すなわち$\dfrac{e^x}{x}-x^2+3=0$として，$h(x)=\dfrac{e^x}{x}-x^2+3$とおく。

$$h'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}-2x=\frac{x-1}{x^2}e^x-2x=\frac{1}{x^2}\{(x-1)e^x-2x^3\}=\frac{g(x)}{x^2}$$

そこで，①の実数解を$x=\alpha$とおくと，$-1<\alpha<0$であり，これより$x<0$における$h(x)$の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0
$h'(x)$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	↗		↘	

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-0}h(x)=-\infty$$

さらに，$h(-1)=-e^{-1}-1+3=2-e^{-1}>0$から，$h(\alpha)>h(-1)>0$である。

したがって，$h(x)=0\ (x<0)$，すなわち②の実数解は2個となり，求める共有点の個数は2個である。

(3)　$a>0$のとき$f(x)=x(x^2-a)$に対して，$y=f(x)$と$y=e^x$のグラフの$x<0$における共有点が1個であるのは，(2)と同様にして，$e^x=x(x^2-a)\ (x<0)$……③の実数解が1個に対応する。

③より，$\dfrac{e^x}{x}-x^2+a=0$として$H(x)=\dfrac{e^x}{x}-x^2+a$とおくと，$h(x)$と同様に，$H(x)$は$x=\alpha$で極大値をとるので，③の実数解が1個の条件は$H(\alpha)=0$となり，

$$\frac{e^\alpha}{\alpha}-\alpha^2+a=0,\ a=\alpha^2-\frac{e^\alpha}{\alpha}\ \cdots\cdots\cdots④$$

そして，$g(\alpha)=0$から$e^\alpha=\dfrac{2\alpha^3}{\alpha-1}$となり，④から，

$$a=\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{2\alpha^3}{\alpha-1}=\alpha^2-\frac{2\alpha^2}{\alpha-1}=\alpha^2\cdot\frac{\alpha-3}{\alpha-1}>0$$

よって，$x<0$における③の実数解が1個になる正の実数aはただ1つ存在する。

［解　説］

微分の応用の問題です。(2)で(1)をどのように利用するかが鍵になっています。

4

問題のページへ

(1)　$P_n(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して，$P_n(x)=\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m x^m$ とおくと，

$$\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m=P_n(1)=1\cdot 2\cdots n=n!$$

(2)　$P_n(x+1)=\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m(x+1)^m$ に対して，二項定理を適用すると，

$$\begin{aligned}P_n(x+1)&=\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m({}_m\mathrm{C}_0+{}_m\mathrm{C}_1\,x+\cdots+{}_m\mathrm{C}_m\,x^m)\\&=\sum_{m=1}^{n}({}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_1\,x+\cdots+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_m\,x^m)\end{aligned}$$

(3)　$P_{n+1}(x)=\sum_{m=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{B}_m x^m$ から，${}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ は $P_{n+1}(x)$ の展開式の x^{k+1} の係数である。

さて，$P_{n+1}(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)=x\,P_n(x+1)$ なので，(2)から，

$$\begin{aligned}x\,P_n(x+1)&=x\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m({}_m\mathrm{C}_0+{}_m\mathrm{C}_1\,x+\cdots+{}_m\mathrm{C}_m\,x^m)\\&=\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m({}_m\mathrm{C}_0\,x+{}_m\mathrm{C}_1\,x^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_m\,x^{m+1})\end{aligned}$$

ここで，${}_m\mathrm{C}_i=0\ (m<i)$ に注意すると，

$$\begin{aligned}x\,P_n(x+1)=\ &{}_n\mathrm{B}_1({}_1\mathrm{C}_0x+{}_1\mathrm{C}_1x^2)+{}_n\mathrm{B}_2({}_2\mathrm{C}_0x+{}_2\mathrm{C}_1x^2+{}_2\mathrm{C}_2x^3)\\&+{}_n\mathrm{B}_3({}_3\mathrm{C}_0x+{}_3\mathrm{C}_1x^2+{}_3\mathrm{C}_2x^3+{}_3\mathrm{C}_3x^4)+\cdots\\&+{}_n\mathrm{B}_{n-1}({}_{n-1}\mathrm{C}_0x+{}_{n-1}\mathrm{C}_1x^2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2x^3+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^n)\\&+{}_n\mathrm{B}_n({}_n\mathrm{C}_0x+{}_n\mathrm{C}_1x^2+{}_n\mathrm{C}_2x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^n+{}_n\mathrm{C}_nx^{n+1})\end{aligned}$$

すると，$x\,P_n(x+1)$ の展開式の x^{k+1} の係数は，

$${}_n\mathrm{B}_k\cdot{}_k\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{B}_{k+1}\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{B}_{k+2}\cdot{}_{k+2}\mathrm{C}_k+\cdots+{}_n\mathrm{B}_n\cdot{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{j=k}^{n}{}_n\mathrm{B}_j\cdot{}_j\mathrm{C}_k$$

以上より，$\sum_{j=k}^{n}{}_n\mathrm{B}_j\cdot{}_j\mathrm{C}_k={}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ である。

［解　説］

整式を題材にした論証問題です。(3)は，証明すべき式の右辺 ${}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ と(2)の $P_n(x+1)$ との関係を考え，$P_{n+1}(x)=x\,P_n(x+1)$ を見つけるのがポイントです。