1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x+b$ とする。b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ。

2

解答解説のページへ

1 つのサイコロを 3 回投げる。1 回目に出る目を a, 2 回目に出る目を b, 3 回目に出る目を c とする。なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする。

(1)　$ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ。

(2)　$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を C_1，放物線 $y=-(x-a)^2+b$ を C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

以下，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わるとし，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

(2)　$S=16$ となるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(3)　$a,\ b$ は $b \leqq a+3$ を満たすとする。このとき S の最大値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　x^3 を $(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$ で割ると，

$$x^3 = (x^2-2ax+a^2)(x+2a)+3a^2x-2a^3$$

　これより，求める余りは $3a^2x-2a^3$ である。

(2)　x^3 を $f(x) = x^2+\alpha x+\beta$ で割ると，

$$x^3 = (x^2+\alpha x+\beta)(x-\alpha)+(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta$$

余りが $3x+b$ より，$\alpha^2-\beta=3$，$\alpha\beta=b$ となり，$b=\alpha(\alpha^2-3)$ ………(＊)

すると，1 つの α の値に対して β の値が 1 つ決まるので，b の値に応じて決まる $f(x)$ の個数は，(＊)を満たす α の個数が対応する。

　そこで，$g(\alpha)=\alpha(\alpha^2-3)=\alpha^3-3\alpha$ とおくと，

$$g'(\alpha)=3\alpha^2-3=3(\alpha+1)(\alpha-1)$$

　これより，$g(\alpha)$ の増減は右表のようになるので，(＊)を満たす α の個数，すなわち $f(x)$ の個数は，

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$-2<b<2$ のとき 3 個，$b=\pm 2$ のとき 2 個，$b<-2$，$2<b$ のとき 1 個

［解 説］

微分法の方程式への応用問題です。$f(x)$ の個数と，(＊)を満たす α の個数の対応関係がポイントです。

2

問題のページへ

(1)　サイコロを 3 回投げ，出る目を順に a，b，c とするとき，a，b の値とその積を表にまとめると，右のようになる。

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

さて，$ab+2c \geqq abc$ となる場合は，

(i)　$c=1$ のとき

$ab+2 \geqq ab$ より，任意の a，b で成り立つことより，$(a,\ b)$ の組は36通りである。

(ii)　$c=2$ のとき

$ab+4 \geqq 2ab$ から $ab \leqq 4$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2+2+3=8$通りである。

(iii)　$c=3$ のとき

$ab+6 \geqq 3ab$ から $ab \leqq 3$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2+2=5$通りである。

(iv)　$c=4$ のとき

$ab+8 \geqq 4ab$ から $ab \leqq \dfrac{8}{3}$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2=3$通りである。

(v)　$c=5$ のとき

$ab+10 \geqq 5ab$ から $ab \leqq \dfrac{5}{2}$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2=3$通りである。

(vi)　$c=6$ のとき

$ab+12 \geqq 6ab$ から $ab \leqq \dfrac{12}{5}$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2=3$通りである。

(i)～(vi)より，$ab+2c \geqq abc$ となる確率は，

$$\frac{36+8+5+3+3+3}{6^3}=\frac{58}{6^3}=\frac{29}{108}$$

(2)　$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となるのは，ab が奇数の場合に限られるので，

(i)　$ab=1\ [(a,\ b)=(1,\ 1)]$ のとき

$1+2c$ と $2c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 6 通りである。

(ii)　$ab=3\ [(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)]$ のとき

$3+2c$ と $6c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 4,\ 5$ の 4 通りである。

(iii)　$ab=5\ [(a,\ b)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)]$ のとき

$5+2c$ と $10c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ の 5 通りである。

(iv)　$ab=9\ [(a,\ b)=(3,\ 3)]$ のとき

$9+2c$ と $18c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 4,\ 5$ の 4 通りである。

(v)　$ab=15\ [(a,\ b)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)]$ のとき

$15+2c$ と $30c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 4$ の 3 通りである。

(vi) $ab=25\,[\,(a,\ b)=(5,\ 5)\,]$のとき

$25+2c$ と $50c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ の 5 通りである。

(i)～(vi)より，$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率は，

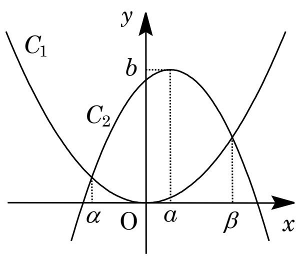
$$\frac{1\times6+2\times4+2\times5+1\times4+2\times3+1\times5}{6^3}=\frac{39}{6^3}=\frac{13}{72}$$

［解　説］

丁寧に数えるタイプの確率問題です。(1)では式の対称性から c の値で場合分けを行っています。また，(2)では奇数である ab の値に注目しています。なお，c の値を決めるのに，互除法を利用する手も考えられます。

3

問題のページへ



(1)　$C_1 : y=\frac{1}{2}x^2$，$C_2 : y=-(x-a)^2+b$ を連立して，

$$\frac{1}{2}x^2=-(x-a)^2+b,\ 3x^2-4ax+2a^2-2b=0$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わることより，

$$D/4=4a^2-3(2a^2-2b)>0$$

すると，$-2a^2+6b>0$ から，$b>\frac{1}{3}a^2$ となる。

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{2a-\sqrt{-2a^2+6b}}{3},\ \beta=\frac{2a+\sqrt{-2a^2+6b}}{3}$$

ここで，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-(x-a)^2+b-\frac{1}{2}x^2\right\}dx=-\frac{3}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{-2a^2+6b}}{3}\right)^3=\frac{2}{27}\left(\sqrt{-2a^2+6b}\right)^3$$

$S=16$ より $\frac{2}{27}\left(\sqrt{-2a^2+6b}\right)^3=16$ となり，$\left(\sqrt{-2a^2+6b}\right)^3=8\cdot27$ から，

$$\sqrt{-2a^2+6b}=6,\ -2a^2+6b=36,\ b=\frac{1}{3}a^2+6$$

(3)　$-a^2+3b=k$ とおくと $S=\frac{2}{27}(\sqrt{2k})^3$ となり，$b\leqq a+3$ のとき，

$$k=-a^2+3b\leqq -a^2+3(a+3)=-a^2+3a+9=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{45}{4}$$

すると，$a=\frac{3}{2}$，$b=a+3=\frac{9}{2}$ のとき，k は最大値 $\frac{45}{4}$ をとり，このとき S は最大値 $\frac{2}{27}\left(\sqrt{\frac{45}{2}}\right)^3=\frac{2}{27}\cdot\frac{45}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{10}$ をとる。

［解　説］

2 つの放物線によって囲まれた図形の面積を題材にした頻出問題です。なお，(3)では，ab 平面上で k の最大値を求める方法もあります。