1

解答解説のページへ

双曲線$x^2-y^2=1$の$x>0$の部分をC_1，$x<0$の部分をC_2とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線$ax-by=1$がC_1，C_2の両方と 1 点ずつで交わるためのa, bの条件を求めよ。

(2)　a, bは(1)で求めた条件をみたすものとする。点$\mathrm{A}(a,\ b)$をとり，直線$ax-by=1$とC_1，C_2の交点をそれぞれ P，Q とする。このとき△APQ の面積Sを$a,\ b$を用いて表せ。

(3)　面積Sの最小値を求めよ。また，その最小値をとるためのa, bの条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

3 つの数 2, m^2+1, m^4+1 が相異なる素数となる正の整数 m が 1 つ固定されているものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 3 つの数 2, m^2+1, m^4+1 のうち, 1 つを a とし, 残り 2 つを b, c とする。このとき $a^2<bc$ となる a をすべて求めよ。

(2) 正の整数 x, y が $(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)$ をみたしているとき x, y を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) > 0$ をみたしているとする。区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2)　$f(x)$ を(1)の関数とするとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$ を示せ。

(3)　関数 $g(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする。このとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$ を示せ。

4

解答解説のページへ

2 名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う。

(i)　正方形の 4 つの頂点を反時計回りに A, B, C, D とする。両者はコマを 1 つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマは A，後攻の持ちゴマは C に置いてあるとする。

(ii) 先攻から始めて，交互にサイコロを振る。ただしサイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。出た目を 3 で割った余りが 0 のときコマは動かさない。また余りが 1 のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが 2 のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

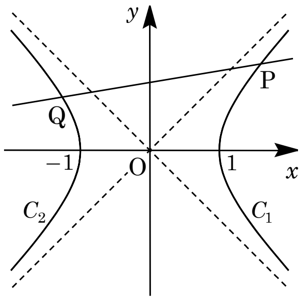
(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

(3)　このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち 2 以上の任意の整数 N に対して，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$ が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[\,a\,]$ は，その整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。

1

問題のページへ



(1) 双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の $x>0$ の部分を C_1，$x<0$ の部分を C_2 とするとき，直線 $ax-by=1$ ……②が C_1，C_2 の両方と 1 点ずつで交わる条件について，まず $b=0$ のとき②は $x=\dfrac{1}{a}$ となり，C_1，C_2 の両方と交わることはない。これより $b\neq 0$ となり，②は $y=\dfrac{1}{b}(ax-1)$ ………③

①③を連立して，$x^2-\dfrac{1}{b^2}(ax-1)^2=1$ から，

$$b^2x^2-(a^2x^2-2ax+1)=b^2,\ (b^2-a^2)x^2+2ax-1-b^2=0\ \cdots\cdots④$$

④の解が $x\leqq -1$，$1\leqq x$ に 1 つずつの条件は，$f(x)=(b^2-a^2)x^2+2ax-1-b^2$ とおき，$f(0)=-1-b^2<0$ に注意すると，

$$b^2-a^2>0,\ f(-1)=-(a+1)^2\leqq 0,\ f(1)=-(a-1)^2\leqq 0$$

よって，求める a, b の条件は $b^2-a^2>0$ となり，これは $b\neq 0$ を満たしている。

(2) ④の解は，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+(b^2-a^2)(1+b^2)}}{b^2-a^2}=\dfrac{-a\pm|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$ となり，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq -1,\ 1\leqq\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{-a-|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2},\ \beta=\frac{-a+|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$$

すると，③から，$\mathrm{P}\Big(\beta,\ \dfrac{1}{b}(a\beta-1)\Big)$，$\mathrm{Q}\Big(\alpha,\ \dfrac{1}{b}(a\alpha-1)\Big)$ となり，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{a^2}{b^2}(\beta-\alpha)^2}=\frac{\beta-\alpha}{|b|}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ と直線 $ax-by=1$ の距離 h は，$h=\dfrac{|a^2-b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これより，△APQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot h=\frac{\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{(b^2-a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{b^2-a^2}$$

(3) $t=b^2-a^2>0$ とおくと，$S=\dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$ となり，

$$S'=\frac{\frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{2}}\cdot t-(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t^2}=\frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}(t-2)}{2t^2}$$

t	0	…	2	…
S'		$-$	0	$+$
S		↘		↗

すると，S の増減は右上表のようになり，S の最小値は $\dfrac{3^{\frac{3}{2}}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。このとき，$t=2$ から $b^2-a^2=2$ である。

［解 説］

双曲線と直線の関係の問題です。解の流れは明快ですので，なるべく計算量の少ない方法を採用することがポイントになります。なお，(1)の結論は，直線 $ax-by=1$ の傾きが -1 より大で 1 より小であるのと同値ですが，これは漸近線の傾きが ±1 であることと関連しています。

2

問題のページへ

(1)　ある正の整数 m に対して，2，m^2+1，m^4+1 が相異なる素数となるので，

$$m^2+1\neq 2,\ m^4+1\neq 2,\ m^2+1\neq m^4+1$$

これより $m\neq 1$ すなわち $m\geqq 2$ となり，このとき $2<m^2+1<m^4+1$………①

さて，2，m^2+1，m^4+1 のうち，1 つを a，残り 2 つを b, c とするとき，

(i)　$a=2$ のとき

①より $2\cdot 2<(m^2+1)(m^4+1)$ となり，$a^2<bc$ は成立する。

(ii)　$a=m^2+1$ のとき

$bc-a^2=2(m^4+1)-(m^2+1)^2=m^4-2m^2+1=(m^2-1)^2$ となり，2 以上の正の整数 m に対して $bc-a^2>0$，すなわち $a^2<bc$ は成立する。

(iii)　$a=m^4+1$ のとき

①より $2(m^2+1)<(m^4+1)^2$ となり，$a^2<bc$ は成立しない。

(i)(ii)(iii)より，$a=2$，m^2+1 である。

(2)　正の整数 x, y に対して，$(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)$ から，

$$(x+y)\{(x+y)^2+y^2\}=2(m^2+1)(m^4+1)\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$x+y\geqq 2$，$(x+y)^2+y^2>x+y$ が成り立ち，整数 $m\geqq 2$ に対して，

$$(m^4+1)-2(m^2+1)=m^4-2m^2-1=(m^2-1)^2-2>0$$

これより，$2(m^2+1)<m^4+1$………②

①②より，(*)を満たす $x+y$ が，2，m^2+1，$2(m^2+1)$ である場合を調べる。

(i)　$x+y=2$，$(x+y)^2+y^2=(m^2+1)(m^4+1)$ のとき

$x=y=1$ から $(m^2+1)(m^4+1)=5$ となるが，この式を満たす m は存在しない。

(ii)　$x+y=m^2+1$，$(x+y)^2+y^2=2(m^4+1)$ のとき

$(m^2+1)^2+y^2=2(m^4+1)$ から，$y^2=m^4-2m^2+1=(m^2-1)^2$ となり，

$$y=m^2-1,\ x=m^2+1-(m^2-1)=2$$

(iii)　$x+y=2(m^2+1)$，$(x+y)^2+y^2=m^4+1$ のとき

$4(m^2+1)^2+y^2=m^4+1$ から $y^2=-3m^4-8m^2-3$ となるが，この式は不成立。

(i)(ii)(iii)より，(*)を満たす x, y は，$x=2$，$y=m^2-1$ である。

［解　説］

素数の関係する整数問題です。(2)については，3 つの素数の大小関係をもとに，候補を絞り込む方法で記述しています。

3

問題のページへ

(1)　関数 $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $f''(x) > 0$ を満たすとき，

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \cdots\cdots\cdots ①$$

まず，$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \cdots\cdots\cdots ②$

また，$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ のときは，$x < \pi - x$，$\pi + x < 2\pi - x$ となり，平均値の定理から，

$$\frac{f(\pi - x) - f(x)}{(\pi - x) - x} = f'(c_1) \quad (x < c_1 < \pi - x)$$

$$\frac{f(2\pi - x) - f(\pi + x)}{(2\pi - x) - (\pi + x)} = f'(c_2) \quad (\pi + x < c_2 < 2\pi - x)$$

$f(\pi - x) - f(x) = (\pi - 2x)f'(c_1)$，$f(2\pi - x) - f(\pi + x) = (\pi - 2x)f'(c_2)$ となり，この式を①に代入すると，

$$F(x) = -(\pi - 2x)f'(c_1) + (\pi - 2x)f'(c_2) = (\pi - 2x)\{f'(c_2) - f'(c_1)\}$$

ここで，$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調に増加し，$c_1 < c_2$ から $f'(c_1) < f'(c_2)$ となり，しかも $\pi - 2x > 0$ なので，$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ において $F(x) > 0 \cdots\cdots ③$となる。

②③より，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$F(x) \geqq 0$ である。

(2)　$I = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ とおいて，積分区間を分割すると，

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

ここで，$x = \pi - t$ とおくと，$dx = -dt$ となり，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - t)\cos(\pi - t)(-dt) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)\cos t\,dt$$

また，$x = \pi + s$ とおくと，$dx = ds$ となり，

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + s)\cos(\pi + s)\,ds = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + s)\cos s\,ds$$

さらに，$x = 2\pi - r$ とおくと，$dx = -dr$ となり，

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi - r)\cos(2\pi - r)(-dr) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - r)\cos r\,dr$$

そして，定積分の積分変数をすべて x に変更すると，

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)\}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx$$

すると，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，(1)から $F(x) \geqq 0$ なので $F(x)\cos x \geqq 0$ となり，

$$I = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

(3)　関数 $g(x)$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $g'(x) < 0$ を満たすとき，$J = \int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$

とおく。さらに，$G'(x) = g(x)$ と設定すると，

$$J = \left[\,G(x)\sin x\,\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx = \int_0^{2\pi} \{-G(x)\}\cos x\,dx$$

すると，$-G''(x) = -g'(x) > 0$ となるので，(2)の結果から，

$$J = \int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \{-G(x)\}\cos x\,dx \geqq 0$$

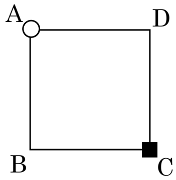
［解　説］

定積分についての論証問題です。(1)の結論を(2)の誘導としてみると，$F(x)$ の形をつくるために，定積分の積分区間を分割するという発見が重要になります。なお，(3)は(2)の結論を利用した方法で記しています。

4

問題のページへ

(1)　最初，先攻の持ちゴマは A，後攻の持ちゴマは C に置いてある。



ここで，サイコロを振り，「コマを動かさない」，「反時計回りに隣の頂点に動かす」，「時計回りに隣の頂点に動かす」という確率が，それぞれ$\dfrac{1}{3}$ずつとする。そして，移動した先に相手のコマがあれば，その時点で勝敗は決まり，ゲームは終了となる。

さて，n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。

まず，サイコロを 2 回振って勝敗が決まるのは，コマの移動が，

「A→B；C→B」「A→D；C→D」

その確率 p_2 は，$p_2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$ となる。

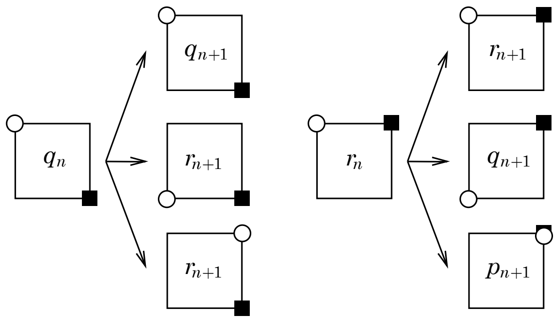
また，サイコロを 3 回振って勝敗が決まるのは，コマの移動が，

「A→A；C→B；A→B」「A→A；C→D；A→D」

「A→B；C→C；B→C」「A→D；C→C；D→C」

その確率 p_3 は，$p_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{4}{27}$ となる。

(2)　サイコロを n 回振って，コマが隣り合わない確率を q_n，コマが隣り合う確率を r_n とする。



そして，n 回振ったときの状態から $n+1$ 回振ったときへの状態の推移は右図のようになり，条件から $q_0=1$，$p_0=r_0=0$ のもとで，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}r_n\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n\cdots\cdots②,\quad r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n\cdots\cdots③$$

③より，$q_n=\dfrac{1}{2}(3r_{n+1}-r_n)$ となり，②に代入すると，

$$\frac{1}{2}(3r_{n+2}-r_{n+1})=\frac{1}{6}(3r_{n+1}-r_n)+\frac{1}{3}r_n,\quad r_{n+2}=\frac{2}{3}r_{n+1}+\frac{1}{9}r_n\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$x^2=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}$ の解 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{3}$ を，$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，④から，

$$r_{n+2}-\alpha r_{n+1}=\beta(r_{n+1}-\alpha r_n)\cdots\cdots⑤,\quad r_{n+2}-\beta r_{n+1}=\alpha(r_{n+1}-\beta r_n)\cdots\cdots⑥$$

そして，③から，$r_1=\dfrac{2}{3}q_0+\dfrac{1}{3}r_0=\dfrac{2}{3}$ となり，⑤⑥から，

$$r_{n+1}-\alpha r_n=(r_1-\alpha r_0)\beta^n=\frac{2}{3}\beta^n,\quad r_{n+1}-\beta r_n=(r_1-\beta r_0)\alpha^n=\frac{2}{3}\alpha^n$$

両辺の差をとると，$(-\alpha+\beta)r_n=\dfrac{2}{3}(\beta^n-\alpha^n)$ となり，$-\alpha+\beta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ から，

$$r_n=\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\beta^n-\alpha^n)$$

よって，$n\geqq 1$ において，①より，

$$p_n=\frac{1}{3}r_{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{6}(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})=\frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

(3)　まず，自然数 n に対して，⑦より，

$$\begin{aligned}p_{2n}-p_{2n+1}&=\frac{\sqrt{2}}{6}(\beta^{2n-1}-\alpha^{2n-1})-\frac{\sqrt{2}}{6}(\beta^{2n}-\alpha^{2n})\\&=\frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\beta^{2n-1}(1-\beta)-\alpha^{2n-1}(1-\alpha)\right\}\\&=\frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\frac{2-\sqrt{2}}{3}\beta^{2n-1}-\frac{2+\sqrt{2}}{3}\alpha^{2n-1}\right\}\end{aligned}$$

すると，$\alpha<0<\beta$ から $p_{2n}-p_{2n+1}>0$ となり，$p_{2n+1}<p_{2n}$ である。

そこで，k を自然数として N を偶奇に分け，$p_1=0$ に留意すると，

(i)　$N=2k$ のとき

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}p_{2m-1}=\sum_{m=1}^{k}p_{2m-1}=\sum_{m=2}^{k}p_{2m-1}=p_3+p_5+\cdots+p_{2k-3}+p_{2k-1}$$

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}p_{2m}=\sum_{m=1}^{k}p_{2m}=p_2+p_4+\cdots+p_{2k-4}+p_{2k-2}+p_{2k}$$

よって，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}p_{2m-1}=\sum_{m=2}^{k}p_{2m-1}<\sum_{m=1}^{k-1}p_{2m}<\sum_{m=1}^{k}p_{2m}=\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}p_{2m}$ となる。

なお，$k=1$ のときは，(1)より $p_1<p_2$ となっている。

(ii)　$N=2k+1$ のとき

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}p_{2m-1}=\sum_{m=1}^{k+1}p_{2m-1}=\sum_{m=2}^{k+1}p_{2m-1}=p_3+p_5+\cdots+p_{2k-1}+p_{2k+1}$$

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}p_{2m}=\sum_{m=1}^{k}p_{2m}=p_2+p_4+\cdots+p_{2k-2}+p_{2k}$$

よって，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}p_{2m-1}=\sum_{m=2}^{k+1}p_{2m-1}<\sum_{m=1}^{k}p_{2m}=\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}p_{2m}$ となる。

(i)(ii)より，N の偶奇にかかわらず，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}p_{2m-1}<\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}p_{2m}$ が成り立つ。

［解 説］

確率と漸化式の問題です。(3)については，N を偶奇に分けたときの証明すべき不等式を眺めながら，(1)の結果も合わせて方針を決めています。