1

解答解説のページへ

a を実数として $f(x)=2x^2-2ax-a^2$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解 t が，必ず $-1\leqq t\leqq 1$ をみたすための a の条件を求めよ。

(2)　(1)で求めた条件をみたす a に対して，$S(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx$ とおく。$S(a)$ の値を求めよ。

(3)　$S(a)$ の値が最小となる a を求めよ。

2

解答解説のページへ

(1)　平面上に$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$をみたす相異なる4点O, P, Q, Rがある。このとき$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=0$ならば，三角形PQRは正三角形であることを示せ。

(2)　空間内に$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=1$をみたす相異なる5点O, A, B, C, Dがある。またOからA, B, Cを含む平面におろした垂線の足をHとする。このとき，以下の2つの命題を示せ。

命題(i)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ならば，三角形ABCは正三角形である。

命題(ii)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=0$かつ$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{3}$ならば，四面体ABCDは正四面体である。

3

解答解説のページへ

xy 平面において $x,\ y$ がともに整数となる点$(x,\ y)$を格子点という。正の整数 n に対して，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ で定まる領域を D とする。4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり，x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を$R(n)$とする。また，そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を$S(n)$とする。以下の問いに答えよ。

(1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ。

(2) $S(n)$ を求めよ。

(3) $R(n)$ を求めよ。

(4) $R(n)=1001$ となる n を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$f(x)=2x^2-2ax-a^2$ に対して，$f(x)=0$ の解 t が必ず $-1\leqq t\leqq 1$ をみたすための a の条件は，$f(0)=-a^2\leqq 0$ に注意すると，

$$f(-1)=2+2a-a^2\geqq 0\cdots\cdots\cdots①,\ f(1)=2-2a-a^2\geqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$a^2-2a-2\leqq 0$ となり，$1-\sqrt{3}\leqq a\leqq 1+\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots③$

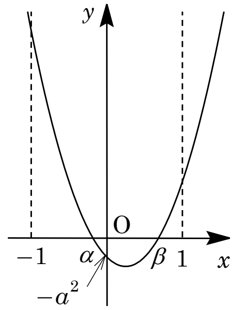
②より，$a^2+2a-2\leqq 0$ となり，$-1-\sqrt{3}\leqq a\leqq -1+\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots④$

③④より，求める a の条件は，$1-\sqrt{3}\leqq a\leqq -1+\sqrt{3}$ となる。

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{a-\sqrt{3a^2}}{2},\ \beta=\frac{a+\sqrt{3a^2}}{2}$$

ここで，$-1\leqq x\leqq\alpha$ のとき $f(x)\geqq 0$，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ のとき $f(x)\leqq 0$，$\beta\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)\geqq 0$ なので，



$$
\begin{aligned}
S(a)&=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx\\
&=\int_{-1}^{\alpha}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\beta}^{1}f(x)dx\\
&=\int_{-1}^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\beta}^{1}f(x)dx-2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\\
&=\int_{-1}^{1}f(x)dx-2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\\
&=2\int_{0}^{1}(2x^2-a^2)dx-2\int_{\alpha}^{\beta}2(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
&=2\Big[\frac{2}{3}x^3-a^2x\Big]_0^1-4\Big(-\frac{1}{6}\Big)(\beta-\alpha)^3=\frac{4}{3}-2a^2+\frac{2}{3}\big(\sqrt{3a^2}\,\big)^3\\
&=\frac{4}{3}-2a^2+2\sqrt{3}|a|^3=2\sqrt{3}a^2|a|-2a^2+\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

(3)　まず，$S(-a)=S(a)$ より，以下，$0\leqq a\leqq -1+\sqrt{3}$ において考えると，

$$S(a)=2\sqrt{3}a^3-2a^2+\frac{4}{3}$$

$$
\begin{aligned}
S'(a)&=6\sqrt{3}a^2-4a\\
&=2a(3\sqrt{3}a-2)
\end{aligned}
$$

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$
$S'(a)$	0	$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

すると，$S(a)$ の増減は右表のようになり，$S(a)$ が最小となる a の値は，対称性を考えて，$a=\pm\frac{2}{9}\sqrt{3}$ である。

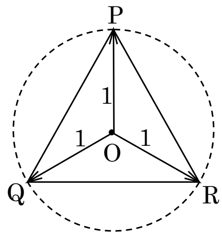
［解　説］

微積分の総合問題です。ポイントは定積分の計算の工夫です。

2

問題のページへ

(1)　平面上の相異なる 4 点 O, P, Q, R に対して,



$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=0$$

すると, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|-\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$$

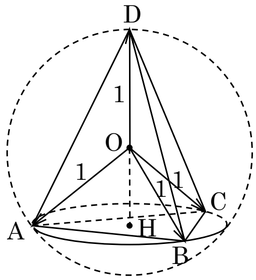
両辺を 2 乗して, $1^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+1^2=1^2$ から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\dfrac{1}{2}$

となり, $\triangle$OPQ に余弦定理を適用すると,

$$\mathrm{PQ}^2=1^2+1^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3,\ \mathrm{PQ}=\sqrt{3}$$

同様にして, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{1}{2}$ から $\mathrm{QR}=\mathrm{RP}=\sqrt{3}$ となるので, $\triangle$PQR は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形である。

(2)　空間内の相異なる 5 点 O, A, B, C, D に対して,



$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

O から A, B, C を含む平面におろした垂線の足を H とする。

［命題(i)の証明］

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=h$ とおくと, OH は平面 ABC に垂直より, ①から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HC}}|=\sqrt{1-h^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\overrightarrow{\mathrm{HA}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}})+3\overrightarrow{\mathrm{OH}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで, 条件より $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ なので, 両辺を 2 乗して, ③から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{HA}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}|^2+6(\overrightarrow{\mathrm{HA}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}+9|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=9|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2$$

これより, $|\overrightarrow{\mathrm{HA}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}|=0$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{HA}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{0}\ \cdots\cdots\cdots④$

さらに, $\overrightarrow{\mathrm{HA'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HA}}}{\sqrt{1-h^2}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HB'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HB}}}{\sqrt{1-h^2}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HC'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HC}}}{\sqrt{1-h^2}}$ とおくと, ②④より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{HA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HC'}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{HA'}}+\overrightarrow{\mathrm{HB'}}+\overrightarrow{\mathrm{HC'}}=\vec{0}$$

すると, (1)の結果から, $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形である。

そして, $\triangle$ABC は $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ と相似となり, 相似比が $\sqrt{1-h^2}:1$ となる。よって, $\triangle$ABC は 1 辺の長さが $\sqrt{3(1-h^2)}$ の正三角形である。

［命題(ii)の証明］

まず, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=0$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

これより, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|-\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=1$ となり, 条件から $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{3}$ なので,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$$

したがって，命題(i)から，三角形 ABC は 1 辺の長さが $\sqrt{3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$ の正三角形である。

次に，③④から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ となり，⑤から $-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

すると，3 点 O, D, H は一直線上にあり，O に関して D と H は反対側なので，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{OD}+\mathrm{OH}=3\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

また，②より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HC}}\right|=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ となり，

$$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

以上より，$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，四面体 ABCD は正四面体である。

［解　説］

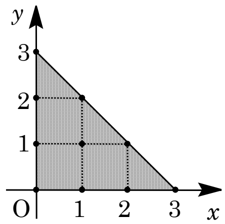
ベクトルの図形への応用問題です。3 つの命題の証明には，いろいろな方法が考えられますが，(1)→(2)(i)→(2)(ii)というつながりを重視した解答例で記しています。

3

問題のページへ

(1)　4 つの頂点が，領域 $D: x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ に含まれる格子点であり，しかも x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする。

まず，$n=3$ のとき，領域 D は右図の網点部となり，D に含まれる長方形の個数について下側の辺の位置で場合分けすると，



(i)　長方形の下側の辺が x 軸上にあるとき

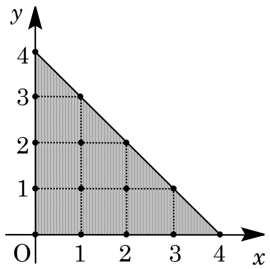
横の長さが 1 のとき $2+1=3$ 個，横の長さが 2 のとき 1 個。

(ii)　長方形の下側の辺が $y \geqq 1$ 上にあるとき

横の長さが 1 のとき 1 個。

(i)(ii)より，$R(3)=(3+1)+1=5$

次に，$n=4$ のとき，領域 D は右図の網点部となり，D に含まれる長方形の個数について，同様に調べると，



(i)　長方形の下側の辺が x 軸上にあるとき

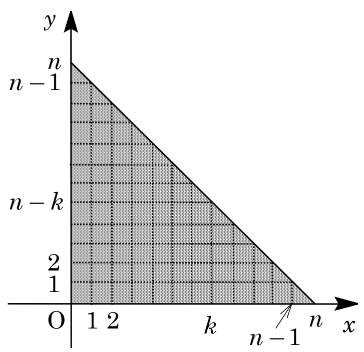
横の長さが 1 のとき $3+2+1=6$ 個，横の長さが 2 のとき $2+1=3$ 個，横の長さが 3 のとき 1 個。

(ii)　長方形の下側の辺が $y \geqq 1$ 上にあるとき

$n=3$ のときに対応し，長方形の数は $R(3)$ 個。

(i)(ii)より，$R(4)=(6+3+1)+R(3)=15$

(2)　領域 D に含まれる長方形ついて，下側の辺が x 軸上にあるときの個数を $S(n)$ とする。



まず，$n \geqq 2$ のとき，整数 k を $1 \leqq k \leqq n-1$ として，横の長さが k の長方形の数 N_k は，

$$N_k=(n-k)+(n-k-1)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$
$$S(n)=\sum_{k=1}^{n-1}N_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1)$$

ここで，$l=n-k$ とおくと，

$$S(n)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}l(l+1)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{3}\{l(l+1)(l+2)-(l-1)l(l+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$D: x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n+1$ に含まれる長方形の数 $R(n+1)$ に対して，

(i)　長方形の下側の辺が x 軸上にあるとき　長方形の数は $S(n+1)$ 個。

(ii)　長方形の下側の辺が $y \geqq 1$ 上にあるとき　長方形の数は $R(n)$ 個。

(i)(ii)より，$R(n+1)=S(n+1)+R(n)$ となり，$n \geqq 2$ のとき，

$$R(n)=R(1)+\sum_{k=1}^{n-1}S(k+1)=0+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(4)　$R(n)=1001$ より，$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)=7\times11\times13$ となり，

$$(n-1)n(n+1)(n+2)=7\times11\times13\times24=11\times12\times13\times14$$

すると，$R(n)$ は単調に増加するので，$n=12$ である。

［解　説］

格子点を題材にした問題です。(1)において，$R(3)$ から $R(4)$ を求める際に，漸化式を利用するという方針を立てました。なお，連続自然数の積の和については，階差数列をつくるという方法で計算をしています。