1

解答解説のページへ

自然数 n に対し，定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。

$\boxed{3}$　解答解説のページへ

p を素数，a, b を整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ。

(2)　$(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ。

(3)　$(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。

4

解答解説のページへ

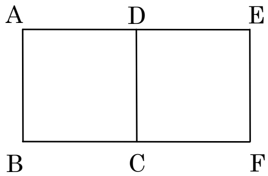


図 1

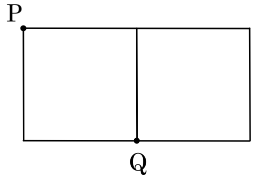


図 2

図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

1

問題のページへ

(1)　$I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$ に対して，$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx$ より，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n(1+x^2)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n\,dx=\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}\leqq\dfrac{x^n}{x^2+1}$ より，$0\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$

$$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$I_{n+2}\geqq 0$ となり，①から $I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots③$

②③より，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots④$

(3)　$n\geqq 3$ のとき，②から $0\leqq I_{n+2}\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq I_{n-1}\leqq I_{n-2}$ となるので，①より，

$$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}\leqq 2I_n,\ \ \frac{1}{n-1}=I_{n-2}+I_n\geqq 2I_n$$

よって，$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{2(n-1)}$ から，$\dfrac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\dfrac{n}{2(n-1)}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$$

(4)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ に対して，$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ とおく。

①から，$I_{2n-1}+I_{2n+1}=\dfrac{1}{2n}$ となるので，$a_n=(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})$ より，

$$S_n=(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-(I_7+I_9)+\cdots+(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})$$
$$=I_1+(-1)^{n-1}I_{2n+1}$$

ここで，④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}I_{2n+1}=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\Big[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

［解　説］

定積分と極限の融合問題です。問題文にも暗示されているように，(1)→(2)→(3)という流れと，(1)→(2)→(4)という流れで，設問が構成されています。

2

問題のページへ

(1)　$a>1$ のとき，$y=a^x$ ……①と $y=\log_a x$ ……②のグラフが，共有点$(p,\ q)$をもつとすると，①②から，$p>0$，$q>0$ で，

$$q=a^p\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad q=\log_a p\ \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，$p=a^q$ となり，③と合わせて，$\dfrac{q}{p}=a^{p-q}$ ………⑤

(i)　$p>q$ のとき　$0<\dfrac{q}{p}<1$ で $a^{p-q}>1$ より，⑤は成立しない。

(ii)　$p<q$ のとき　$\dfrac{q}{p}>1$ で $a^{p-q}<1$ より，⑤は成立しない。

(iii)　$p=q$ のとき　$\dfrac{q}{p}=1$ で $a^{p-q}=1$ より，⑤は成立する。

(i)～(iii)より，①と②のグラフが共有点をもつとき，それは直線 $y=x$ 上にある。

(2)　(1)より，①と②のグラフが共有点は，②と直線 $y=x$ の共有点なので，

$$x=\log_a x,\quad x=\frac{\log x}{\log a},\quad \log a=\frac{\log x}{x}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

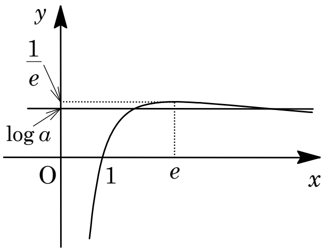
さて，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f(x)=\log a$ の解が①と②のグラフが共有点の x 座標に対応し，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$の増減は右表のようになる。さらに，

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から，$y=f(x)$ のグラフは右図の曲線である。



ここで，$a>1$ から $\log a>0$ に注意すると，⑥の解は 2 個以下，すなわち①と②のグラフの共有点は 2 個以下である。

(3)　①と②のグラフの共有点が 1 個であるとき，(2)より，$x=e$ となり，共有点の座標は$(e,\ e)$である。また，このとき $\log a=\dfrac{1}{e}$ より，$a=e^{\frac{1}{e}}$ となる。

［解 説］

微分の方程式への応用問題です。(1)と(2)は，題意を考えると，グラフから明らかというわけにはいきません。また，(2)では $y=\log_a x$ と $y=x$ の組合せで処理しましたが，$y=a^x$ と $y=x$ を組合せでも構いません。対数は微分と相性良しと思い，前者を選択しただけですので。

3

問題のページへ

(1)　p を素数, $a,\,b$ を整数とするとき，二項定理より，

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\sum_{k=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}b^k-a^p-b^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}b^k$$

ここで，$1\leqq k\leqq p-1$ のとき，$k!$ および $(p-k)!$ はともに p で割り切れない。これより，${}_p\mathrm{C}_k=\dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$ は p の倍数となる。

よって，$(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れる。

(2)　(1)と同様に，二項定理より，

$$(a+2)^p-a^p=\sum_{k=1}^{p}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}\cdot 2^k$$

ここで，$1\leqq k\leqq p$ のとき 2^k は 2 の倍数となるので，$(a+2)^p-a^p$ は偶数である。

(3)　$A=(a+2)^p-a^p$ とおくと，(2)より A は偶数なので，l を整数として，

$A=2l$ ………①

(1)より，$(a+2)^p-a^p-2^p$ は p で割り切れることより，m を整数として，

$A-2^p=pm$，$A=pm+2^p$ ………②

さて，2^p を p で割った余りを求めるために，(2)と同様に二項定理を利用すると，

$$2^p=(1+1)^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k+1^p+1^p=2+\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k$$

すると，$1\leqq k\leqq p-1$ のとき ${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数より，2^p を p で割った余りは 2 を p で割った余りに等しいので，素数 p を $p=2$ と $p\geqq 3$ で場合分けをする。

(i)　$p=2$ のとき　このとき，$A=(a+2)^2-a^2=4(a+1)$ となる。

これより，A を $2p=4$ で割った余りは 0 である。

(ii)　$p\geqq 3$ のとき　2^p を p で割った余りは 2 より，②から，n を整数として，

$A=pm+(pn+2)=p(m+n)+2$ ………③

①③より，$2l=p(m+n)+2$ から $2(l-1)=p(m+n)$

2 と p は互いに素なので，i を整数として，$l-1=pi$　$(l=pi+1)$ と表せるので，

$A=2(pi+1)=2pi+2$

よって，A を $2p$ で割った余りは 2 である。

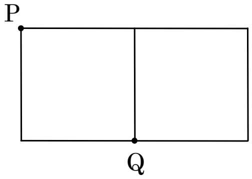
［解　説］

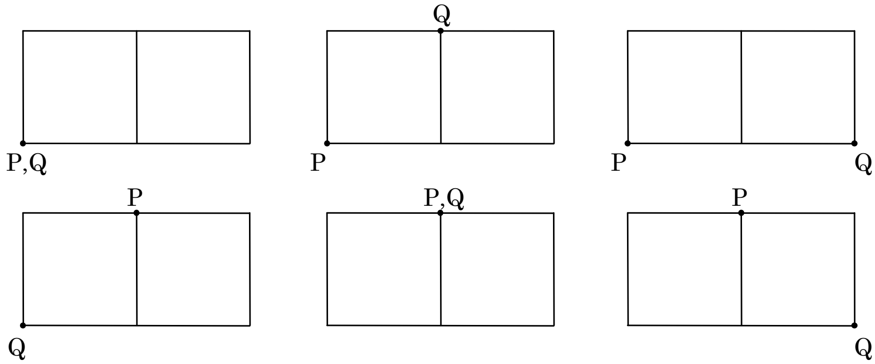
二項定理の絡んだ整数問題です。誘導が細かく付いていますので，それに従って解いていけばよいでしょう。なお，(3)は 2^p を p で割った余りがポイントです。

4

問題のページへ

(1)　条件より，時刻 0 での点 P，Q の配置が右図のとき，点 P，Q は独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動するので，時刻 1 での点 P, Q の可能な配置は，次の 6 パターンである。





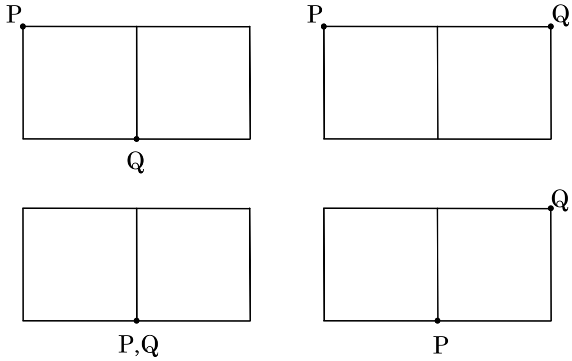
(2)　まず，時刻 1 までに 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P，Q がともに同じ正方形上にいるのは，時刻 1 での左下，中上，右下の図の場合より，その確率 a_1 は $a_1=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ である。

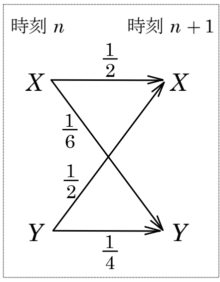
また，時刻 1 までに 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P，Q が異なる正方形上にいるのは，時刻 1 での右上の図の場合より，その確率 b_1 は $b_1=\dfrac{1}{6}$ である。

ここで，対称性を考慮すると，一般的に 2 点 P，Q が同じ正方形の異なる頂点にいるのは，その正方形の対角線上に位置する場合であり，これを状態 X とする。また，2 点 P，Q が異なる正方形の頂点にいるのは，辺 CD について対称の位置にある場合であり，これを状態 Y とする。

すると，時刻 0 から時刻 1 への状態から，一般的に $X\to X$ の推移確率は $\dfrac{1}{2}$，$X\to Y$ の推移確率は $\dfrac{1}{6}$ となる。

また，時刻 1 での右上図の点 P，Q の配置から，時刻 2 での点 P，Q の可能な配置は，右の 4 パターンである。すると，一般的に $Y\to X$ の推移確率は $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$Y\to Y$ の推移確率は $\dfrac{1}{4}$ となる。





まとめると，状態の推移は右図となり，$n=1$ のときは，

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$b_2=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{4}b_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$

(3)　(2)と同様にして，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{4}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

(4)　$p_n\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^n$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$p_1=a_1+b_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\leqq\frac{3}{4}$ となり，成り立っている。

(ii)　$n=k$ のとき　$p_k\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^k$ と仮定すると，①②から，

$$p_{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}=\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k\right)+\left(\frac{1}{6}a_k+\frac{1}{4}b_k\right)=\frac{2}{3}a_k+\frac{3}{4}b_k$$

$$\leqq\frac{3}{4}a_k+\frac{3}{4}b_k=\frac{3}{4}(a_k+b_k)=\frac{3}{4}p_k\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，$p_n\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^n$ である。

［解　説］

確率と漸化式の問題です。問題文の読解力が要求されるとともに，答案の記述についてもかなりのエネルギーが費やされます。