1

解答解説のページへ

不等式$0<a<1$を満たす定数 a に対して，曲線$C: y=a-1-\log x\ (x>0)$を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点$\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ$(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$とする。このとき，次の問いに答えよ。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=0$を証明なしで使ってよい。

(1)　関数$u(s)$，$v(s)$を s の式で表せ。

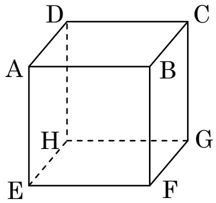
(2)　関数$t=u(s)$，$t=v(s)$の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

(3)　関数$t=u(s)$，$t=v(s)$の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を $a,\ b,\ t$ を使って表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件(I), (II), (III)を満たしている。

(I)　集合 M は n 個の要素からなる。

(II) 集合 M の要素 z に対して, $\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(III) 集合 M の要素 z, w に対して, その積 zw は集合 M の要素である。ただし, $z=w$ の場合も含める。

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2)　n は偶数であることを示せ。

(3)　$n=4$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

(4)　$n=6$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

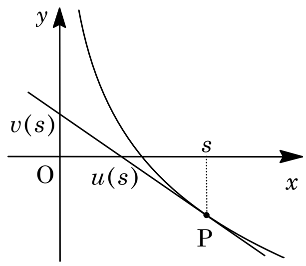
$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = a-1-\log x\ (0<a<1)$ に対し，$y' = -\dfrac{1}{x}$

より，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$ における接線の式は,

$$y-(a-1-\log s) = -\frac{1}{s}(x-s)$$

$$y = -\frac{1}{s}x + a - \log s \cdots\cdots\cdots①$$



①が $(u(s),\ 0)$ を通ることより,

$$0 = -\frac{1}{s}u(s) + a - \log s,\ u(s) = s(a-\log s) \cdots\cdots\cdots②$$

また，①が $(0,\ v(s))$ を通ることより，$v(s) = a - \log s \cdots\cdots\cdots③$

(2)　②より，$u'(s) = (a-\log s) - 1 = a - \log s - 1$

そこで，$u'(s) = 0$ とすると，$\log s = a-1$ から $s = e^{a-1}$ となり,

$$u(e^{a-1}) = e^{a-1}(a-a+1) = e^{a-1}$$

また，$\displaystyle\lim_{s\to+0} u(s) = \lim_{s\to+0} s(a-\log s) = 0$

$$\lim_{s\to\infty} u(s) = \lim_{s\to\infty} s(a-\log s) = -\infty$$

s	0	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$u'(s)$		$+$	0	$-$
$u(s)$	0	$\nearrow$	e^{a-1}	$\searrow$

すると，$u(s)$ の増減は右表のようになる。

さらに，$u''(s) = -\dfrac{1}{s} < 0$ から，$t = u(s)$ のグラフはつねに上に凸である。

次に，③より，$v'(s) = -\dfrac{1}{s} < 0$，$v''(s) = \dfrac{1}{s^2} > 0$ より，$v(s)$ は単調に減少し，

$t = v(s)$ のグラフはつねに下に凸となり,

$$\lim_{s\to+0} v(s) = \lim_{s\to+0}(a-\log s) = \infty,\ \lim_{s\to\infty} v(s) = \lim_{s\to\infty}(a-\log s) = -\infty$$

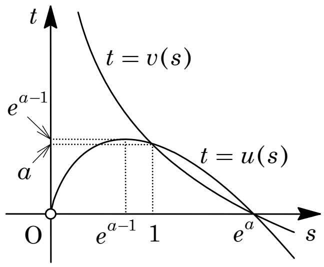
ここで，$t = u(s)$ と $t = v(s)$ のグラフの共有点は,

$$s(a-\log s) = a - \log s,\ (s-1)(a-\log s) = 0$$

すると，$s = 1,\ e^a$ となり，その座標は,

$$(1,\ a),\ (e^a,\ 0)$$

さらに，$a-1<0<a$ から，$e^{a-1}<1<e^a$ となり，これをもとに $t = u(s)$，$t = v(s)$ のグラフを描くと，右図のようになる。



(3)　$t = u(s)$，$t = v(s)$ のグラフで囲まれた図形を，t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V = \int_1^{e^a} 2\pi s\{u(s)-v(s)\}ds = 2\pi\int_1^{e^a} s(s-1)(a-\log s)ds$$

ここで，$\log s = u\ (s = e^u)$ とおくと，$ds = e^u du$ となり,

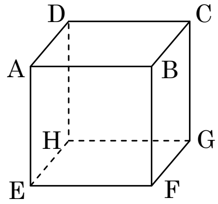
$$V=2\pi\int_0^a e^u(e^u-1)(a-u)e^u du=2\pi\int_0^a (a-u)(e^{3u}-e^{2u})du$$
$$=2\pi\left\{\left[(a-u)\left(\frac{1}{3}e^{3u}-\frac{1}{2}e^{2u}\right)\right]_0^a+\int_0^a\left(\frac{1}{3}e^{3u}-\frac{1}{2}e^{2u}\right)du\right\}$$
$$=2\pi\left\{-a\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left[\frac{1}{9}e^{3u}-\frac{1}{4}e^{2u}\right]_0^a\right\}=2\pi\left\{\frac{a}{6}+\frac{1}{9}(e^{3a}-1)-\frac{1}{4}(e^{2a}-1)\right\}$$
$$=\pi\left(\frac{2}{9}e^{3a}-\frac{1}{2}e^{2a}+\frac{a}{3}+\frac{5}{18}\right)$$

［解 説］

微積分の総合問題です。標準的な内容ですが，計算量や記述量はかなりあります。なお，(3)の求積は円筒分割を利用しています。

2

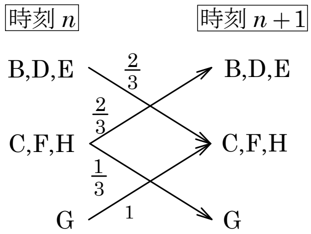
問題のページへ



(1)　時刻0でAにいた点Pが, 時刻nにおいて, Aに戻らずB, D, Eのいずれかにいる確率p_n, Aに戻らずC, F, Hのいずれかにいる確率q_n, Aに戻らずGにいる確率r_nについて,

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③$$



ここで, $p_1=1$, $q_1=r_1=0$なので, ①②③より,

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=0,\ q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\frac{2}{3},\ r_2=\frac{1}{3}q_1=0$$

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\frac{4}{9},\ q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=0,\ r_3=\frac{1}{3}q_2=\frac{2}{9}$$

(2)　$n\geqq 2$のとき, ①より$p_n=\frac{2}{3}q_{n-1}$, ③より$r_n=\frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると, $q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}$, $q_{n+1}=\frac{7}{9}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$

さて, ④に$n=2k$を代入すると$q_{2k+1}=\frac{7}{9}q_{2k-1}$となり, $q_{2k-1}=q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=0$

$$p_{2k}=\frac{2}{3}q_{2k-1}=0,\ r_{2k}=\frac{1}{3}q_{2k-1}=0$$

④に$n=2k+1$を代入すると$q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$となり, $q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\ r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より, $q_n=0$ (nが奇数), $q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (nが偶数)

また, $n=2k+1$のとき, $k-1=\frac{n-3}{2}$から,

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{が3以上の奇数}),\ p_n=0\ (n\text{が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{が3以上の奇数}),\ r_n=0\ (n\text{が偶数})$$

(3)　時刻$2m$で頂点Aに初めて戻る確率s_mは, $m\geqq 2$のとき,

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお, $m=1$のときは, $s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$である。

(4)　(3)より, mの値を$m=2$, $m=3$, $m\geqq 4$と場合分けをする。

(i)　$m=2$のとき　$s_2=\frac{4}{27}$, $t_2={s_1}^2=\frac{1}{9}$となり, $t_2<s_2$である。

(ii)　$m=3$のとき　$s_3=\frac{4}{27}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{243}$, $t_3=s_1s_2+s_2s_1=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}=\frac{8}{81}$

これより, $t_3<s_3$である。

(iii) $m \geqq 4$ のとき　$s_m = \dfrac{4}{27}\Big(\dfrac{7}{9}\Big)^{m-2}$, $t_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} s_k s_{m-k} = s_1 s_{m-1} + s_{m-1}s_1 + \sum_{k=2}^{m-2} s_k s_{m-k}$

$$t_m = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-3} + \sum_{k=2}^{m-2}\frac{4}{27}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{k-2}\cdot\frac{4}{27}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-k-2}$$

$$= \frac{4}{27}\Big\{\frac{2}{3}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-3} + \frac{4}{27}\sum_{k=2}^{m-2}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-4}\Big\} = \frac{4}{27}\Big\{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9} + \frac{4}{27}(m-3)\Big\}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-4}$$

$$= \frac{4}{27}\Big(\frac{4}{27}m + \frac{2}{27}\Big)\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-4}$$

$$t_m - s_m = \frac{4}{27}\Big(\frac{4}{27}m + \frac{2}{27}\Big)\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-4} - \frac{4}{27}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-2}$$

$$= \frac{4}{27}\Big(\frac{4}{27}m + \frac{2}{27} - \frac{49}{81}\Big)\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-4} = \frac{4}{27}\Big(\frac{4}{27}m - \frac{43}{81}\Big)\Big(\frac{7}{9}\Big)^{m-4}$$

$m \geqq 4$ のとき，$\dfrac{4}{27}m - \dfrac{43}{81} \geqq \dfrac{16}{27} - \dfrac{43}{81} > 0$ となり，$t_m > s_m$ である。

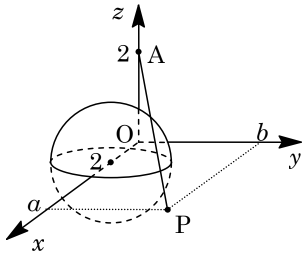
(i)～(iii)より，$t_m < s_m$ となる m は，$m = 2,\ 3$ である。

［解　説］

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。なお，理系単独の(4)については，詰めの数値計算が面倒です。

3

問題のページへ



(1)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+t(a,\ b,\ -2)$$

よって，$\mathrm{Q}(at,\ bt,\ 2-2t)$ となる。

(2)　(1)から，$l:(x,\ y,\ z)=(at,\ bt,\ 2-2t)\cdots\cdots\cdots①$

$$S:(x-2)^2+y^2+z^2=2\cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$(at-2)^2+b^2t^2+(2-2t)^2=2$

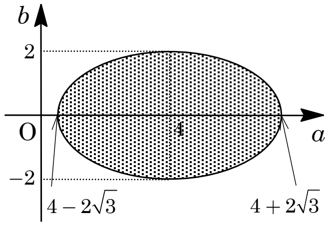
$$(a^2+b^2+4)t^2-4(a+2)t+6=0\cdots\cdots\cdots③$$

l が S と相異なる 2 点で交わるので，③から，

$$D/4=4(a+2)^2-6(a^2+b^2+4)>0,\ a^2-8a+3b^2+4<0$$

すると，$(a-4)^2+3b^2<12$ となり，

$$\frac{(a-4)^2}{12}+\frac{b^2}{4}<1\cdots\cdots\cdots④$$



④を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

(3)　$T:(x-2)^2+y^2+z^2=2$ かつ $z>0$ なので，l が T と相異なる 2 点で交わる条件は，①から $2-2t>0$ すなわち $t<1$ となるので，③が $t<1$ である相異なる 2 解をもつことに対応する。すると，④に加えて，

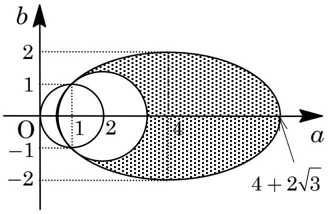
$$\frac{2(a+2)}{a^2+b^2+4}<1\cdots\cdots\cdots⑤,\ (a^2+b^2+4)-4(a+2)+6>0\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$a^2+b^2+4>2(a+2)$ となり，

$$(a-1)^2+b^2>1\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥より，$a^2+b^2-4a+2>0$ となり，

$$(a-2)^2+b^2>2\cdots\cdots\cdots⑧$$



④⑦⑧を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

［解 説］

空間図形を題材とし，2 次方程式の解の配置を関連させた基本的な問題です。ただ，領域の図示については，時間をかなり費やしてしまいます。

4

問題のページへ

(1)　n 個の要素からなる 0 でない複素数の集合 M に対して，$z\in M$ とすると，条件(II)から，$\dfrac{1}{z}\in M$，$-z\in M$ である。

すると，条件(III)から，$z\cdot\dfrac{1}{z}\in M$ すなわち $1\in M$ である。さらに，$-z\cdot\dfrac{1}{z}\in M$ すなわち $-1\in M$ である。

(2)　$z\in M$ とすると，条件(III)から，$z^n\in M$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ である。

ここで，$|z|=r$ とおくと，$|z^n|=|z|^n=r^n$ となり，

(i)　$r>1$ のとき

$r<r^2<r^3<\cdots<r^n<\cdots$ となり，M の要素は有限個ではない。

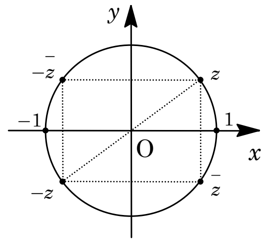
(ii)　$0<r<1$ のとき

$r>r^2>r^3>\cdots>r^n>\cdots$ となり，M の要素は有限個ではない。

(i)(ii)より，$r=1$ となり，このとき $|z|^2=1$ すなわち $z\bar{z}=1$ である。

まず，M の要素が実数だけのときは，(1)から，$M=\{1,\ -1\}$ である。

次に，純虚数でない虚数 z に対し $z\in M$ とすると，条件(II)から $-z\in M$ である。また，$\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ から，共役複素数も M の要素となるので，$\bar{z}\in M$，$-\bar{z}\in M$ である。



これより，M の要素に純虚数でない虚数 z があれば，

$M=\{1,\ -1,\ z,\ -z,\ \bar{z},\ -\bar{z}\}$

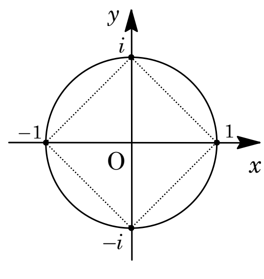
また，M の要素の虚数が純虚数のみであれば，$\bar{i}=-i$，$-\bar{i}=i$ から，

$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$

さらに，M の要素に純虚数および純虚数でない虚数 z があれば，

$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i,\ z,\ -z,\ \bar{z},\ -\bar{z}\}$

そして，純虚数でない虚数が複数個あるときも同様に考えていくと，M の要素の個数 n は，k を自然数として $n=4k,\ 4k-2$ の形で表せ，いずれの場合も偶数である。



(3)　$n=4$ のとき，M の要素は 1 と -1 以外に 2 つ存在し，その要素は，(2)より i と $-i$ なので，

$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$

なお，M の要素は 1 の 4 乗根となり，M は積について閉じている。

(4)　$n=6$ のとき，M の要素は 1 と -1 以外に 4 つ存在し，その要素は，(2)より純虚数でない虚数 z をとり，

$M=\{1,\ -1,\ z,\ -z,\ \bar{z},\ -\bar{z}\}$

ここで，$z\neq 0$，$z\neq\pm 1$，$z\neq\pm i$ から，$z^2=1$，$z^2=-1$，$z^2=z$，$z^2=-z$ の場合はない。

(a)　$z^2=\overline{z}$ のとき

$\arg z=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\arg z^2$ は第 1 象限または第 2 象限の角，$\arg\overline{z}$ は第 4 象限の角となり，$\arg z^2\neq\arg\overline{z}$ である。

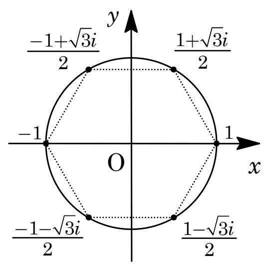
(b)　$z^2=-\overline{z}$ のとき

$\arg z=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\arg z^2=2\theta$，$\arg(-\overline{z})=\pi-\theta$ より，

$$2\theta=\pi-\theta,\ \theta=\frac{\pi}{3}$$

よって，$z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$-z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \overline{z}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ -\overline{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$



以上より，集合 M は，

$$M=\left\{1,\ -1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

なお，M の要素は 1 の 6 乗根となり，M は積について閉じている。

［解 説］

複素数の絡んだ論証問題です。結論は予測できるものの，それに至る記述がかなり難航し，いくら記述しても不足する気分になってしまいます。そのため，上の解答例ではプロセスを簡略化して緻密さに欠ける部分も残しています。