1

解答解説のページへ

a を $-3<a<13$ をみたす実数とし，次の曲線 C と直線 l が接しているとする。

$$C: y=\left|x^2+(3-a)x-3a\right|,\quad l: y=-x+13$$

以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの図形のうち，点 $(a,\ 0)$ が境界線上にある図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{P}(4,\ 0,\ -1)$ を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2)　点 P から平面 α に垂線を下ろし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを求めよ。

(3)　平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

k を実数とし，整式 $f(x)$ を，$f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$ で定める。方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x-2$ で割り切れることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は負の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

$f(x)$を整式とする。$F'(x)=f(x)$となる関数$F(x)$を 1 つ選び，$f(x)$の a からbまでの定積分を

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \cdots\cdots\cdots ①$$

で定義する。定積分の値は$F(x)$の選び方によらず定まる。定積分は次の性質(A), (B), (C)をもつ。

(A)　$\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx$

(B)　$a \leqq c \leqq b$のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(C)　区間$a \leqq x \leqq b$において$g(x) \geqq h(x)$ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)dx \geqq \int_a^b h(x)dx$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$は整式，k, lは定数である。

以下，$f(x)$が区間$0 \leqq x \leqq 1$上で増加関数になる場合を考える。n を自然数とする。<u>定積分の性質 $\boxed{\text{ア}}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，</u>

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$とおくと，不等式②と定積分の性質 $\boxed{\text{イ}}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n} \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，nを限りなく大きくすると，S_nは$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$に限りなく近づく。

(1)　関数$F(x)$，$G(x)$が微分可能であるとき，$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x)$が成り立つことと定積分の定義①を用いて，性質(A)で$k=l=1$とした場合の等式 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ を示せ。

(2)　定積分の定義①と，関数の増減と導関数の関係を用いて，次を示せ。

$a<b$のとき，区間$a \leqq x \leqq b$において$g(x)>0$ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$

(3)　(A), (B), (C)のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式②を示せ。

(4)　(A), (B), (C)のうち，空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式③を示せ。

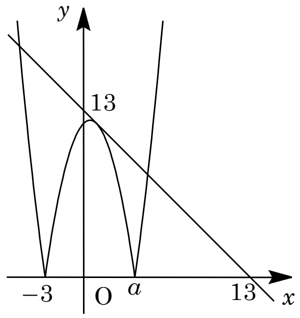
1

問題のページへ

(1)　$-3<a<13$ のとき，$C: y=\left|x^2+(3-a)x-3a\right|=\left|(x+3)(x-a)\right|$ ……①に対し，

$y=x^2+(3-a)x-3a$　$(x\leqq -3,\ a\leqq x)$

$y=-x^2-(3-a)x+3a$　$(-3\leqq x\leqq a)$



ここで，曲線 C と直線 $l: y=-x+13$ ……②が接することより，接点は $-3\leqq x\leqq a$ にあり，このとき①②を連立すると，$-x^2-(3-a)x+3a=-x+13$ から，

$x^2+(2-a)x+13-3a=0$ ………③

③が重解をもつので，$D=(2-a)^2-4(13-3a)=0$

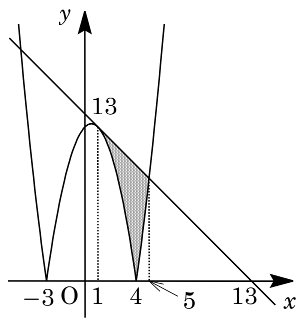
$a^2+8a-48=0$，$(a+12)(a-4)=0$

$-3<a<13$ から，$a=4$ となる。

(2)　$a=4$ のとき，$C: y=\left|x^2-x-12\right|$ となり，$x\geqq 4$ における l との交点は，$x^2-x-12=-x+13$ から，

$x^2-25=0$，$x=5$

また，C と l の接点は，③より $x=-\dfrac{2-a}{2}=1$ となり，点 $(4,\ 0)$ が境界線上にある右図の網点部の面積 S は，



$$S=\int_1^4\{(-x+13)-(-x^2+x+12)\}dx+\int_4^5\{(-x+13)-(x^2-x-12)\}dx$$

$$=\int_1^4(x-1)^2dx+\int_4^5(-x^2+25)dx=\Big[\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_1^4+\Big[-\frac{x^3}{3}+25x\Big]_4^5$$

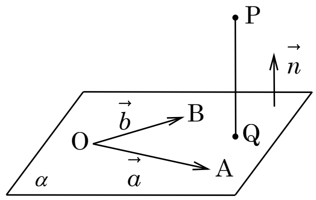
$$=\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{1}{3}\cdot 61+25=\frac{41}{3}$$

［解　説］

絶対値つきの関数のグラフを題材とした面積計算の基本問題です。場合分けが不要となるように配慮がされています。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　3 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 1,\ 0)$，$B(2,\ 1,\ 2)$ を通る平面 α に垂直な $\vec{n}$ について，$\vec{n}=(k,\ l,\ m)\ (k>0)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ から，

$$k+l=0\cdots\cdots①,\ 2k+l+2m=0\cdots\cdots②$$

また，$|\vec{n}|=1$ から，$k^2+l^2+m^2=1\cdots\cdots\cdots③$

①より $l=-k$，②から $2k-k+2m=0$ から $m=-\dfrac{k}{2}$ なので，③に代入して，

$$k^2+k^2+\frac{k^2}{4}=1,\ k^2=\frac{4}{9}$$

$k>0$ から $k=\dfrac{2}{3}$ となり，$l=-\dfrac{2}{3}$，$m=-\dfrac{1}{3}$ より，$\vec{n}=\dfrac{1}{3}(2,\ -2,\ -1)$ である。

(2)　点 $P(4,\ 0,\ -1)$ から平面 α に垂線を下ろし，その交点を Q とおくと，

$$\overrightarrow{OQ}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\ (\alpha,\ \beta\ は定数),\ \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\gamma\vec{n}\ (\gamma\ は定数)$$

すると，$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\gamma\vec{n}$ となり，各成分を比べて，

$$\alpha+2\beta=4+\frac{2}{3}\gamma\cdots\cdots④,\ \alpha+\beta=-\frac{2}{3}\gamma\cdots\cdots⑤,\ 2\beta=-1-\frac{1}{3}\gamma\cdots\cdots⑥$$

④⑤より $\beta=4+\dfrac{4}{3}\gamma$ となり，⑥に代入すると $8+\dfrac{8}{3}\gamma=-1-\dfrac{1}{3}\gamma$ から $\gamma=-3$

よって，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\gamma\vec{n}$ なので，$PQ=|\overrightarrow{PQ}|=|\gamma||\vec{n}|=|-3|\cdot1=3$

(3)　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-3\vec{n}=(4,\ 0,\ -1)-(2,\ -2,\ -1)=(2,\ 2,\ 0)$

ここで，平面 α に関して点 P と対称な点を P' とすると，$\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'})=\overrightarrow{OQ}$ より，

$$\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(4,\ 4,\ 0)-(4,\ 0,\ -1)=(0,\ 4,\ 1)$$

よって，$P'(0,\ 4,\ 1)$ となる。

［解 説］

ベクトルの空間図形への応用について，頻出有名問題です。(2)以降は平面の方程式を利用する方法でも構いません。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$ （kは実数）に対して，

$$f(2)=2^4+6\cdot 2^3-k\cdot 2^2+2k\cdot 2-64=0$$

すると，因数定理から，$f(x)$は$x-2$で割り切れる。

(2)　(1)から，$f(x)=(x-2)\{x^3+8x^2-(k-16)x+32\}$

ここで，$g(x)=x^3+8x^2-(k-16)x+32$ とおくと，実数係数の 4 次方程式 $f(x)=0$が虚数解をもつことより，$g(x)=0$は実数解αと虚数解β，$\overline{\beta}$をもち，

$$\alpha+\beta+\overline{\beta}=-8\cdots\cdots①,\ \ \alpha\beta+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}=-k+16\cdots\cdots②,\ \ \alpha\beta\overline{\beta}=-32\cdots\cdots③$$

すると，③から$\alpha|\beta|^2=-32$となり，$|\beta|^2>0$から$\alpha<0$である。

(3)　$f(x)=0$の解は$x=2$，α，β，$\overline{\beta}$であり，$\beta=p+qi$とおくと，条件からα，p，qは整数である。ここで，①③から，

$$\alpha+2p=-8\cdots\cdots\cdots④,\ \ \alpha(p^2+q^2)=-32\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，αは 32 の負の約数であり，$\alpha=-1,\ -2,\ -4,\ -8,\ -16,\ -32$となり，④に代入すると，整数$(\alpha,\ p)$の組は，

$$(\alpha,\ p)=(-2,\ -3),\ (-4,\ -2),\ (-8,\ 0),\ (-16,\ 4),\ (-32,\ 12)$$

さらに，⑤を満たす整数$(\alpha,\ p,\ q)$の組は，

$$(\alpha,\ p,\ q)=(-4,\ -2,\ \pm 2),\ (-8,\ 0,\ \pm 2)$$

そして，②より$2\alpha p+p^2+q^2=-k+16$となり，$k=16-2\alpha p-p^2-q^2$から，

$$k=16-16-4-4=-8,\ \ k=16-0-0-4=12$$

［解　説］

3 次方程式の解と整数を組み合した問題です。誘導が細かいので，それに乗れば完答できます。

4　　問題のページへ

(1)　$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ のとき $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$ が成り立ち，しかも $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ ……①から，

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b \{F'(x)+G'(x)\}dx=\int_a^b \{F(x)+G(x)\}'dx$$

$$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

(2)　区間 $a\leqq x\leqq b$ $(a<b)$ において，$g(x)>0$ すなわち $G'(x)>0$ ならば，$G(x)$ は単調に増加する。すると，$G(a)<G(b)$ から，

$$\int_a^b g(x)dx=G(b)-G(a)>0$$

(3)　区間 $0\leqq x\leqq 1$ で増加関数である $f(x)$ に対して，n を自然数，i を $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ としたとき，区間 $\frac{i-1}{n}\leqq x\leqq\frac{i}{n}$ において，$f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$ となる。

ここで，定積分の性質(C)から，

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i-1}{n}\right)dx\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right)dx$$

すると，$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i-1}{n}\right)dx=\left[f\left(\frac{i-1}{n}\right)x\right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}=f\left(\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)$

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right)dx=\left[f\left(\frac{i}{n}\right)x\right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}=f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

よって，$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx\leqq\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ ………②

(4)　②より，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

ここで，$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)+\frac{1}{n}\{f(1)-f(0)\}=S_n+\frac{1}{n}\{f(1)-f(0)\}$$

また，定積分の性質(B)から，$\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx=\int_{\frac{0}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

よって，$S_n\leqq\int_0^1 f(x)dx\leqq S_n+\frac{1}{n}\{f(1)-f(0)\}$ となり，

$$0\leqq\int_0^1 f(x)dx-S_n\leqq\frac{f(1)-f(0)}{n}\ \cdots\cdots\cdots③$$

［解 説］

定積分の定義を問う「共通テスト」風の問題です。内容は基本的ですが，ただ数学Ⅲを履修していなければ難しく感じるでしょう。