

1

解答解説のページへ

点 $(a, 0)$ を通り、曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b, c, d を整数とし, i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) c, d を a, b を用いて表せ。
- (2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り, 11 で割ると 10 余るとする。また, $f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り, 11 で割ると 10 余るとする。 a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を l 、辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m 、辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。 $l \perp m$ 、 $m \perp n$ 、 $n \perp l$ であり、 $AB = \sqrt{5}$ 、 $BC = \sqrt{3}$ 、 $CA = 2$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) を求めよ。
- (2) 四面体 $OABC$ の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

4

解答解説のページへ

4 個のサイコロを同時に投げるとき、出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

- (1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標空間において、中心 $(0, 2, 0)$ 、半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。 D を底面とし、 $z \geq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱（内部を含む）を E とする。点 $(0, 2, 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け、 D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $-1 \leq t \leq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また、 T の体積を求めよ。
- (2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

1

問題のページへ

まず、曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に対して、 $y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$ となり、点 $(t, e^{-t} - e^{-2t})$ における接線の方程式は、

$$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t) \dots\dots\dots ①$$

①が点 $(a, 0)$ を通ることより、 $-(e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$

$$(e^{-t} - 2e^{-2t})a = t(e^{-t} - 2e^{-2t}) + (e^{-t} - e^{-2t}) \dots\dots\dots ②$$

$e^{-t} - 2e^{-2t} = 0$ のとき、②は $0 = e^{-2t}$ となり成立しないので $e^{-t} - 2e^{-2t} \neq 0$ であり、

$$a = \frac{t(e^{-t} - 2e^{-2t}) + (e^{-t} - e^{-2t})}{e^{-t} - 2e^{-2t}} = \frac{t(e^t - 2) + (e^t - 1)}{e^t - 2} \dots\dots\dots ③$$

さて、③が実数解をもつ条件は、 $f(t) = \frac{t(e^t - 2) + (e^t - 1)}{e^t - 2}$ とおくとき、 $y = a$ と $y = f(t)$ のグラフが共有点をもつ条件に対応する。

そこで、 $f(t)$ を変形して、 $f(t) = \frac{t(e^t - 2) + (e^t - 2) + 1}{e^t - 2} = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$ として、

$$f'(t) = 1 - \frac{e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{e^{2t} - 5e^t + 4}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$$

これより、 $f(t)$ の増減は右表のようになり、

$$f(\log 4) = \log 4 + \frac{3}{2}$$

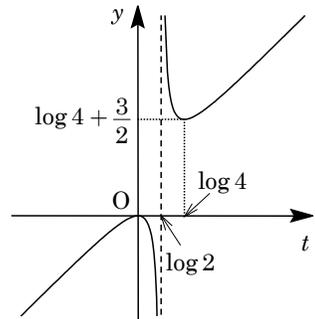
t	...	0	...	$\log 2$...	$\log 4$...
$f'(t)$	+	0	-	×	-	0	+
$f(t)$	↗	0	↘	×	↘		↗

また、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t + 1 + \frac{1}{e^t - 2} \right) = \infty$ 、 $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(t + 1 + \frac{1}{e^t - 2} \right) = -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow \log 2 + 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow \log 2 + 0} \left(t + 1 + \frac{1}{e^t - 2} \right) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \log 2 - 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow \log 2 - 0} \left(t + 1 + \frac{1}{e^t - 2} \right) = -\infty$$

すると、 $y = f(t)$ のグラフは右図のようになり、③すなわち $a = f(t)$ が実数解をもつ a の値の範囲、言い換えると点 $(a, 0)$ を通り曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在する a の値の範囲は、 $a \leq 0, \log 4 + \frac{3}{2} \leq a$ となる。



[解説]

微分法の方程式への応用問題で、解法の流れは明快です。ただ、 $f'(t)$ の計算量を軽減するために、 $f(t)$ を変形するという工夫をしています。

2

問題のページへ

(1) a, b, c, d を整数とする $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対して, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ と

おくと, $f(\alpha) = 0$ から, 方程式 $f(x) = 0$ は α と $\bar{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ を解にもち,

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1, \quad \alpha\bar{\alpha} = \frac{1+3}{4} = 1$$

ここで, 解と係数の関係より, α と $\bar{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式として $x^2 - x + 1 = 0$ をとり, $f(x)$ を $x^2 - x + 1$ で割ると,

$$f(x) = (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a+1)x + (a+b)\} + (b+c-1)x + (-a-b+d)$$

$x = \alpha$ を代入すると, $f(\alpha) = (b+c-1)\alpha + (-a-b+d) = 0$ となり, α は虚数なので, $b+c-1=0$ かつ $-a-b+d=0$ より,

$$c = -b + 1, \quad d = a + b \cdots \cdots (*)$$

(2) (*) より, $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - (b-1)x + (a+b)$ となり,

$$f(1) = 1 + a + b - (b-1) + (a+b) = 2a + b + 2$$

$$f(-1) = 1 - a + b + (b-1) + (a+b) = 3b$$

$f(1)$ を 7 で割ると 1 余り, 11 で割ると 10 余るので, p, q を整数として,

$$2a + b + 2 = 7p + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2a + b + 2 = 11q + 10 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り, 11 で割ると 10 余るので, r, s を整数として,

$$3b = 7r + 3 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad 3b = 11s + 10 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

すると, $\textcircled{3}\textcircled{4}$ より, $7r + 3 = 11s + 10$ となり, $7(r-1) = 11s$

ここで, 7 と 11 は互いに素より, k を整数として $s = 7k$ となり, $\textcircled{4}$ から,

$$3b = 11 \cdot 7k + 10 = 77k + 10 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

さらに, $|b| \leq 40$ から $|3b| \leq 120$ となり, $|77k + 10| \leq 120$ から, $k = -1, 0, 1$

(i) $k = -1$ のとき $\textcircled{5}$ より $3b = -67$ となり b は整数でない。

(ii) $k = 0$ のとき $\textcircled{5}$ より $3b = 10$ となり b は整数でない。

(iii) $k = 1$ のとき $\textcircled{5}$ より $3b = 87$ となり $b = 29$ である。

(i)(ii)(iii) より, $b = 29$ となり, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ に代入すると,

$$2a + 31 = 7p + 1 \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad 2a + 31 = 11q + 10 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

すると, $\textcircled{6}\textcircled{7}$ より, $7p + 1 = 11q + 10$ となり, $7p - 11q = 9 \cdots \cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{8}$ を満たす解の 1 つが $(p, q) = (6, 3)$ より, $7 \cdot 6 - 11 \cdot 3 = 9$ となり,

$$7(p-6) - 11(q-3) = 0, \quad 7(p-6) = 11(q-3)$$

ここで, 7 と 11 は互いに素より, l を整数として $p-6 = 11l$ となり, $\textcircled{6}$ から,

$$2a = 7(11l + 6) + 1 - 31 = 77l + 12 \cdots \cdots \textcircled{9}$$

さらに, $|a| \leq 40$ から $|2a| \leq 80$ となり, $|77l + 12| \leq 80$ から, $l = -1, 0$

(iv) $l = -1$ のとき ⑨より $2a = -65$ となり a は整数でない。

(v) $l = 0$ のとき ⑨より $2a = 12$ となり $a = 6$ である。

(iv)(v)より, $a = 6$ となり, $b = 29$ と合わせて,

$$f(x) = (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a+1)x + (a+b)\} = (x^2 - x + 1)(x^2 + 7x + 35)$$

よって, $f(x) = 0$ の解は, $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-7 \pm \sqrt{91}i}{2}$ である。

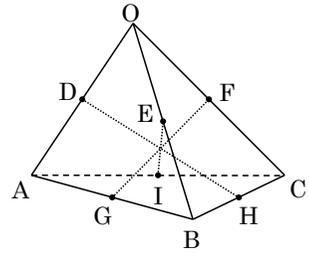
[解説]

4 次方程式の解を題材とした不定方程式の問題です。(2)では, まず①~④を解いて a, b の一般解を求めた後, 絶対値が 40 以下として絞り込むこともできますが, かなりの時間を費やしてしまいます。

3

問題のページへ

- (1) 四面体 $OABC$ において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき、辺 OA , OB , OC , AB , BC , CA の中点を、それぞれ D , E , F , G , H , I とすると、



$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$$

そして、 \overrightarrow{DH} , \overrightarrow{EI} , \overrightarrow{FG} は、それぞれ直線 l , m , n の方向ベクトルである。

さて、 $l \perp m$ より $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{EI} = 0$ なので、 $(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0$ から、

$$|\vec{c}|^2 - |-\vec{a} + \vec{b}|^2 = 0, \quad |\vec{c}| = |-\vec{a} + \vec{b}|$$

よって、 $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}|$ より、 $OC = AB = \sqrt{5}$ ……①

同様に、 $m \perp n$ より $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$, $n \perp l$ より $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$ なので、

$$(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 0, \quad (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

よって、 $OA = BC = \sqrt{3}$ ……②, $OB = CA = 2$ ……③となる。

そこで、 $\triangle OAB$ と $\triangle OBC$ に余弦定理を適用すると、

$$5 = 3 + 4 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad 3 = 4 + 5 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

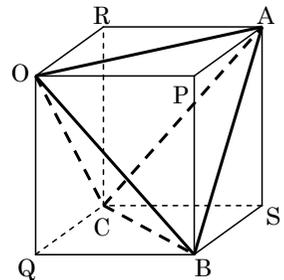
これより、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$ となり、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 1 - 3 = -2$

そして、直線 OB と直線 CA のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると、

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{CA}|} = \frac{|-2|}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

よって、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる。

- (2) ①②③より、四面体 $OABC$ は 4 つの面が合同な三角形であるので、右図のように直方体 $OPAR$ - $QBSC$ に埋め込むことができる。



ここで、 $OP = p$, $OQ = q$, $OR = r$ とおくと、

$$p^2 + q^2 = OB^2 = 4 \quad \dots\dots④$$

$$q^2 + r^2 = OC^2 = 5 \quad \dots\dots⑤$$

$$r^2 + p^2 = OA^2 = 3 \quad \dots\dots⑥$$

⑤⑥より $q^2 - p^2 = 2$ となり、④と合わせて $p^2 = 1$, $q^2 = 3$, $r^2 = 2$

すると、四面体 $OABC$ の 4 つの頂点をすべて通る球の中心を K とすると、 K は直方体 $OPAR$ - $QBSC$ の中心に一致するので、球の半径 KO は、

$$KO = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+3+2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

[解説]

四面体を題材にした空間図形の問題です。ただ、(1)のプロセスから、この四面体が等面四面体であることがわかりますので、その知識を利用して(2)は解いています。

4

問題のページへ

(1) 4個のサイコロを同時に投げるとき、出る目を a, b, c, d とし、 $X = abcd$ とおく。

X が $25 = 5^2$ の倍数になるのは、5の目のサイコロの個数で場合分けをして、

(i) a, b, c, d のうち 2個が 5 のとき その確率は、 ${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{150}{6^4}$

(ii) a, b, c, d のうち 3個が 5 のとき その確率は、 ${}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{20}{6^4}$

(iii) a, b, c, d のうち 4個が 5 のとき その確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4}$

(i)(ii)(iii)より、 X が 25 の倍数になる確率は、 $\frac{150}{6^4} + \frac{20}{6^4} + \frac{1}{6^4} = \frac{171}{6^4} = \frac{19}{144}$ となる。

(2) まず、 X が偶数の確率は、 $1 - \left(\frac{3}{6}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ である。

次に、 X が 4 の倍数でない偶数の場合は、 a, b, c, d のうち 1個が 2 または 6、残り 3個が奇数より、その確率は、

$${}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{2^3 \cdot 3^3}{6^4} = \frac{1}{6}$$

よって、 X が 4 の倍数になる確率は、 $\frac{15}{16} - \frac{1}{6} = \frac{37}{48}$ となる。

(3) X が $100 = 2^2 \cdot 5^2$ の倍数になるのは、5の目のサイコロの個数で場合分けをして、

(i) a, b, c, d のうち 2個が 5 のとき

2個の選び方が ${}_4C_2 = 6$ 通りで、 $c = d = 5$ のときは、 ab が 4 の倍数となる。

(i-i) a, b のうち 2個が 4 のとき その確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6^2}$

(i-ii) a, b のうち 1個が 4 のとき

a または b の一方だけが 4、もう一方は 1, 2, 3, 6 のいずれかより、その確率は

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{8}{6^2}$$

(i-iii) a, b のうち 0個が 4 のとき

a, b は 2 または 6 のいずれかより、その確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{4}{6^2}$ である。

よって、このときの確率は、 $6 \left(\frac{1}{6^2} + \frac{8}{6^2} + \frac{4}{6^2}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{6^3}$ となる。

(ii) a, b, c, d のうち 3個が 5 のとき

残り 1個は 4 より、その確率は ${}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6^4}$

(i)(ii)より、 X が 100 の倍数になる確率は、 $\frac{13}{6^3} + \frac{4}{6^4} = \frac{82}{6^4} = \frac{41}{648}$ となる。

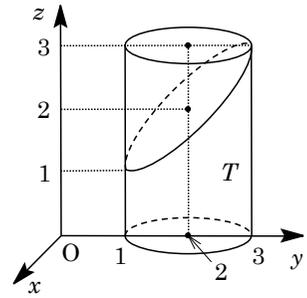
[解説]

丁寧な場合分けをもとに計算する確率問題です。(2)では余事象の考え方を利用しましたが、(1)や(3)と同じように場合分けで処理しても構いません。

5

問題のページへ

- (1) xy 平面内にある中心 $(0, 2, 0)$, 半径 1 の円を底面とし, $z \geq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。このとき, 点 $(0, 2, 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け, 下側の部分を T とする。



このとき, T を表す連立不等式は,

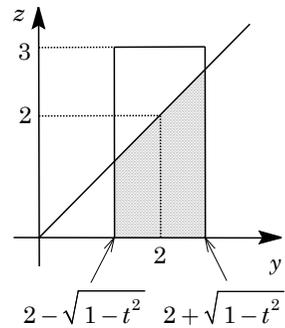
$$x^2 + (y-2)^2 \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 0 \leq z \leq 3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$z \leq y \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて, 平面 $x=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で T を切ったとき, $\textcircled{1}$ より,

$$t^2 + (y-2)^2 \leq 1, \quad (y-2)^2 \leq 1-t^2, \quad 2-\sqrt{1-t^2} \leq y \leq 2+\sqrt{1-t^2} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

そして, $\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$ から, 断面を $x=t$ 上に図示すると, 右図の網点部となり, この面積 $S(t)$ は,



$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} (2+\sqrt{1-t^2})^2 - \frac{1}{2} (2-\sqrt{1-t^2})^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{1-t^2} \cdot 2 = 4\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

また, T の体積 V は,

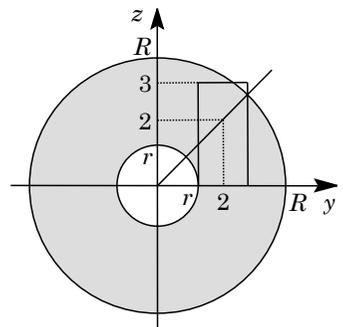
$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(t) dt = 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt \\ &= 8 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = 8 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi \end{aligned}$$

- (2) 平面 $x=t$ 上で, T の断面を x 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R , 内径を r とおくと,

$$R = \sqrt{2} (2 + \sqrt{1-t^2}), \quad r = 2 - \sqrt{1-t^2}$$

このドーナツ形の面積 $U(t)$ は,

$$\begin{aligned} U(t) &= \pi (R^2 - r^2) \\ &= \pi \{ 4 + 12\sqrt{1-t^2} + (1-t^2) \} \\ &= \pi (5 - t^2 + 12\sqrt{1-t^2}) \end{aligned}$$



すると, T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 W は,

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^1 U(t) dt = \pi \int_{-1}^1 (5 - t^2 + 12\sqrt{1-t^2}) dt \\ &= 2\pi \int_0^1 (5 - t^2 + 12\sqrt{1-t^2}) dt = 2\pi \left(5 - \frac{1}{3} \right) + 24\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi (14 + 9\pi) \end{aligned}$$

[解説]

立体の体積についての標準的な問題です。計算も複雑ではありません。