

1

解答解説のページへ

$a \geq 0$  とする。2 つの放物線  $C_1 : y = x^2$ ,  $C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  が異なる 2 点で交わるような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $a$  が(1)で求めた範囲を動くとき、 $C_1$  と  $C_2$  で囲まれた図形の面積  $S$  の最大値を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, p)$ ,  $C(q, r, s)$  を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし,  $p > 0$ ,  $s > 0$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $p, q, r, s$  の値を求めよ。
- (2)  $z$  軸に垂直な平面で正四面体  $OABC$  を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a, b, c$  を整数とし,  $i$  を虚数単位とする。整式  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  が  $f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$  をみたすとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  を  $c$  を用いて表せ。
- (2)  $f(1)$  を 7 で割ると 4 余り,  $f(-1)$  を 11 で割ると 2 余るとする。 $c$  の絶対値が 40 以下であるとき, 方程式  $f(x) = 0$  の解をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

4 個のサイコロを同時に投げるとき、出る目すべての積を  $X$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $X$  が 25 の倍数になる確率を求めよ。
- (2)  $X$  が 4 の倍数になる確率を求めよ。
- (3)  $X$  が 100 の倍数になる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)  $C_1 : y = x^2$  と  $C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$  を連立すると、

$$x^2 = 3(x-a)^2 + a^3 - 40, \quad 2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0 \cdots \cdots (*)$$

$C_1$  と  $C_2$  が異なる 2 点で交わることより、 $D/4 = 9a^2 - 2(a^3 + 3a^2 - 40) > 0$

$$2a^3 - 3a^2 - 80 < 0, \quad (a-4)(2a^2 + 5a + 20) < 0$$

$a \geq 0$  から  $2a^2 + 5a + 20 > 0$  となり、求める  $a$  の値の範囲は  $0 \leq a < 4$  である。

(2)  $0 \leq a < 4$  のとき、(\*)の解を  $x = \alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とおくと、

$$\alpha = \frac{3a - \sqrt{-2a^3 + 3a^2 + 80}}{2}$$

$$\beta = \frac{3a + \sqrt{-2a^3 + 3a^2 + 80}}{2}$$

すると、 $C_1$  と  $C_2$  で囲まれた図形の面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} -(2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -2 \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{-2a^3 + 3a^2 + 80})^3 \end{aligned}$$

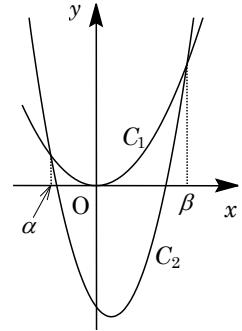
ここで、 $f(a) = -2a^3 + 3a^2 + 80$  とおくと、

$$f'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1)$$

すると、 $f(a)$  の増減は右表のようになり、

$a=1$  のとき最大値 81 をとる。

よって、 $S$  の最大値は、 $\frac{1}{3} \cdot 81^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 9^3 = 243$  である。



$a$	0	⋯	1	⋯	4
$f'(a)$	0	+	0	-	
$f(a)$		↗	81	↘	

[解説]

2つの放物線の囲まれる図形の面積を問う頻出典型題です。

2

問題のページへ

(1) 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, p)$ ,  $C(q, r, s)$  に対し, 四面体  $OABC$  が正四面体であり,  $OA = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$  より,

$$OB = OC = AB = BC = AC = \sqrt{2} \dots\dots\dots ①$$

ここで,  $OB = \sqrt{1+p^2}$  なので, ①より  $1+p^2 = 2$  となり,  $p > 0$  から  $p = 1$  このとき,  $B(1, 0, 1)$  となり,  $AB = \sqrt{2}$  を満たしている。

次に,  $OC = \sqrt{q^2+r^2+s^2}$  なので, ①より  $q^2+r^2+s^2 = 2 \dots\dots\dots ②$

$$BC = \sqrt{(q-1)^2+r^2+(s-1)^2}, \quad AC = \sqrt{(q-1)^2+(r-1)^2+s^2} \text{ なので, ①より,}$$

$$(q-1)^2+r^2+(s-1)^2 = 2 \dots\dots\dots ③, \quad (q-1)^2+(r-1)^2+s^2 = 2 \dots\dots\dots ④$$

②③より,  $-2q+1-2s+1=0$  となり,  $q=1-s \dots\dots\dots ⑤$

②④より,  $-2q+1-2r+1=0$  となり, ⑤から  $r=1-q=1-(1-s)=s \dots\dots\dots ⑥$

⑤⑥を②に代入して,  $(1-s)^2+s^2+s^2=2$  から  $3s^2-2s-1=0$  となり,

$$(3s+1)(s-1)=0$$

$s > 0$  から  $s = 1$  となり, ⑤⑥から  $q = 0, r = 1$  である。

(2) (1)より  $C(0, 1, 1)$  となり, 正四面体  $OABC$  を平面  $z = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) で切ったときの断面を考える。

まず,  $t = 0$  のとき断面は線分  $OA$ ,  $t = 1$  のとき断面は線分  $BC$  となり, ともにその面積は 0 である。

次に,  $0 < t < 1$  のとき,  $z = t$  と辺  $OB, OC, AC, AB$  との交点をそれぞれ  $D, E, F, G$  とおくと, これらの点はそれぞれの辺を  $t:1-t$  に内分する点になるので,

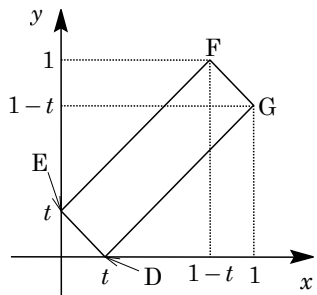
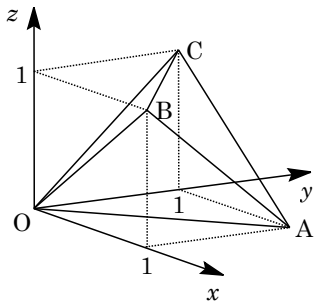
$$D(t, 0, t), \quad E(0, t, t), \quad F(1-t, 1, t), \quad G(1, 1-t, t)$$

すると,  $z = t$  上での断面は右図の長方形となり, その面積を  $S(t)$  とおくと,

$$S(t) = \sqrt{t^2+t^2} \cdot \sqrt{(1-t)^2+(1-t)^2} = 2t(1-t)$$

$$= -2t^2 + 2t = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

したがって, 断面積は  $t = \frac{1}{2}$  のとき最大になり, 最大値は  $\frac{1}{2}$  である。



**[解説]**

四面体が題材の空間図形の問題です。(1)はいろいろな方法が考えられますが, 最も基本的なもので記しました。

3

問題のページへ

(1)  $a, b, c$  を整数とする  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  に対して,  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  とおくと,

$f(\alpha) = 0$  から, 方程式  $f(x) = 0$  は  $\alpha$  と  $\bar{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$  を解にもち,

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1, \quad \alpha\bar{\alpha} = \frac{1+3}{4} = 1$$

ここで, 解と係数の関係より,  $\alpha$  と  $\bar{\alpha}$  を解にもつ 2 次方程式として  $x^2 - x + 1 = 0$  をとり,  $f(x)$  を  $x^2 - x + 1$  で割ると,

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + a + 1) + (a + b)x + (-a + c - 1)$$

$x = \alpha$  を代入すると,  $f(\alpha) = (a + b)\alpha + (-a + c - 1) = 0$  となり,  $\alpha$  は虚数なので,  $a + b = 0$  かつ  $-a + c - 1 = 0$  より,

$$a = c - 1, \quad b = -a = -c + 1 \cdots \cdots (*)$$

(2) (\*) より,  $f(x) = x^3 + (c-1)x^2 - (c-1)x + c = (x^2 - x + 1)(x + c)$  となり,

$$f(1) = 1 + (c-1) - (c-1) + c = c + 1$$

$$f(-1) = -1 + (c-1) + (c-1) + c = 3c - 3$$

$f(1)$  を 7 で割ると 4 余るので,  $p$  を整数として,  $c + 1 = 7p + 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$f(-1)$  を 11 で割ると 2 余るので,  $q$  を整数として,  $3c - 3 = 11q + 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$

すると,  $\textcircled{1}$  より  $c = 7p + 3$ ,  $\textcircled{2}$  より  $3c = 11q + 5$  となり,

$$3(7p + 3) = 11q + 5, \quad 21p - 11q = -4 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  を満たす解の 1 つが  $(p, q) = (4, 8)$  より,  $21 \cdot 4 - 11 \cdot 8 = -4$  となり,

$$21(p - 4) - 11(q - 8) = 0, \quad 21(p - 4) = 11(q - 8)$$

ここで, 21 と 11 は互いに素より,  $k$  を整数として  $p - 4 = 11k$  となり,  $\textcircled{1}$  から,

$$c = 7(11k + 4) + 3 = 77k + 31$$

さらに,  $|c| \leq 40$  から  $|77k + 31| \leq 40$  となり,  $k = 0$  すなわち  $c = 31$  である。

このとき,  $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 31)$  と表せることから,  $f(x) = 0$  の解は,  $x = -31, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  である。

### [解説]

3 次方程式の解に不定方程式を絡めたタイプです。(1)は(2)との関連も考えて, 整式の除法を利用しています。

4

問題のページへ

(1) 4個のサイコロを同時に投げるとき、出る目を  $a, b, c, d$  とし、 $X = abcd$  とおく。

$X$  が  $25 = 5^2$  の倍数になるのは、5の目のサイコロの個数で場合分けをして、

(i)  $a, b, c, d$  のうち 2個が 5 のとき その確率は、 ${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{150}{6^4}$

(ii)  $a, b, c, d$  のうち 3個が 5 のとき その確率は、 ${}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{20}{6^4}$

(iii)  $a, b, c, d$  のうち 4個が 5 のとき その確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4}$

(i)(ii)(iii)より、 $X$  が 25 の倍数になる確率は、 $\frac{150}{6^4} + \frac{20}{6^4} + \frac{1}{6^4} = \frac{171}{6^4} = \frac{19}{144}$  となる。

(2) まず、 $X$  が偶数の確率は、 $1 - \left(\frac{3}{6}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$  である。

次に、 $X$  が 4 の倍数でない偶数の場合は、 $a, b, c, d$  のうち 1個が 2 または 6、残り 3個が奇数より、その確率は、

$${}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{2^3 \cdot 3^3}{6^4} = \frac{1}{6}$$

よって、 $X$  が 4 の倍数になる確率は、 $\frac{15}{16} - \frac{1}{6} = \frac{37}{48}$  となる。

(3)  $X$  が  $100 = 2^2 \cdot 5^2$  の倍数になるのは、5の目のサイコロの個数で場合分けをして、

(i)  $a, b, c, d$  のうち 2個が 5 のとき

2個の選び方が  ${}_4C_2 = 6$  通りで、 $c = d = 5$  のときは、 $ab$  が 4 の倍数となる。

(i-i)  $a, b$  のうち 2個が 4 のとき その確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6^2}$

(i-ii)  $a, b$  のうち 1個が 4 のとき

$a$  または  $b$  の一方だけが 4、もう一方は 1, 2, 3, 6 のいずれかより、その確率は

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{8}{6^2}$$

(i-iii)  $a, b$  のうち 0個が 4 のとき

$a, b$  は 2 または 6 のいずれかより、その確率は  $\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{4}{6^2}$  である。

よって、このときの確率は、 $6 \left(\frac{1}{6^2} + \frac{8}{6^2} + \frac{4}{6^2}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{6^3}$  となる。

(ii)  $a, b, c, d$  のうち 3個が 5 のとき

残り 1個は 4 より、その確率は  ${}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6^4}$

(i)(ii)より、 $X$  が 100 の倍数になる確率は、 $\frac{13}{6^3} + \frac{4}{6^4} = \frac{82}{6^4} = \frac{41}{648}$  となる。



**[解説]**

丁寧な場合分けをもとに計算する確率問題です。(2)では余事象の考え方を利用しましたが、(1)や(3)と同じように場合分けで処理しても構いません。