1　　解答解説のページへ

表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき, 出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

2

解答解説のページへ

k を実数とする。3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4\left|k\right|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間内の 3 点 $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(3,\ 2,\ 3)$, $C(4,\ 5,\ 6)$ を通る平面を α とし, 平面 α 上にない点 $P(6,\ p,\ q)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p, q を用いて表せ。

(2) 点 P が $(p-9)^2+(q-7)^2=1$ を満たしながら動くとき, 四面体 ABCP の体積の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7,\quad g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

1

問題のページへ

表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨を 10 回投げ, 表が n 回, 裏が$10-n$回出たとき, 出た数字 10 個の積は$3^n\cdot 8^{10-n}$となる。そして, この積が 8 桁になることより,

$$10^7 \leqq 3^n\cdot 8^{10-n} < 10^8 \cdots\cdots\cdots①$$

①より, $7\leqq \log_{10} 3^n\cdot 8^{10-n} < 8$となり, $7\leqq n\log_{10}3+3(10-n)\log_{10}2<8$から,

$$7\leqq (\log_{10}3-3\log_{10}2)n+30\log_{10}2<8 \cdots\cdots\cdots②$$

すると, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$から, ②は,

$$7\leqq -0.4259n+9.030<8,\ 1.030<0.4259n\leqq 2.030 \cdots\cdots\cdots③$$

③を満たす整数 n は, $n=3,\ 4$となり, これより求める確率は,

$${}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_{10}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{120}{2^{10}}+\frac{210}{2^{10}}=\frac{165}{512}$$

［解　説］

対数計算の基本問題です。繁雑な計算もありません。

© 電送数学舎 2019

$\boxed{2}$

問題のページへ

実数 k に対して，$f(x)=x^3-kx^2+kx+1$ とおくとき，$f'(x)=3x^2-2kx+k$

ここで，3 次関数 $y=f(x)$ が極大値と極小値をもつことより，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことが必要で，その判別式 $D/4=k^2-3k>0$ から，

$$k<0,\ 3<k\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

このとき，$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha=\frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3},\ \beta=\frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

そして，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ をもち，

$$f(\alpha)-f(\beta)=\big[\,f(x)\,\big]_\beta^\alpha=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}\Big)^3=\frac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}$$

ここで，条件より，$\dfrac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}=4|k|^3$ から，$(k^2-3k)^3=3^6k^6$ となり，

$$k^2-3k=9k^2,\ 8k^2=-3k$$

すると，$(*)$から，$k=-\dfrac{3}{8}$ となる。

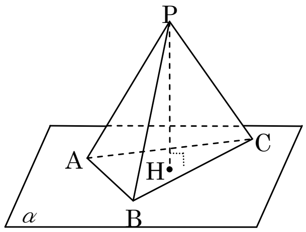
［解　説］

3 次関数の極大値と極小値の差という有名問題です。類題は，たとえば 1998 年の東大・文にも見られます。なお，解答例はテクニカルな方法で記しましたが，普通に解と係数の関係を利用する解法でも構いません。

© 電送数学舎 2019

3

問題のページへ



(1)　A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6)に対して，

$$\overrightarrow{AB}=(2,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(3,\ 3,\ 3),$$

また，P(6, p, q)から，$\overrightarrow{AP}=(5,\ p-2,\ q-3)$

ここで，3 点 A, B, C を通る平面α上に H があるので，k, lを実数として，$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$とおくと，

$$\overrightarrow{PH}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$$

PH は平面αに垂直なので，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$から$(k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{AB}=0$となり，

$$k\cdot 4+l\cdot 6-10=0,\ 2k+3l=5\cdots\cdots\text{①}$$

また，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$から$(k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{AC}=0$となり，

$$k\cdot 6+l\cdot(9+9+9)-(15+3p-6+3q-9)=0,\ 2k+9l=p+q\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$l=\dfrac{p+q-5}{6}$，$k=\dfrac{15-p-q}{4}$となり，

$$\overrightarrow{PH}=\frac{15-p-q}{4}(2,\ 0,\ 0)+\frac{p+q-5}{6}(3,\ 3,\ 3)-(5,\ p-2,\ q-3)$$
$$=\frac{15-p-q}{2}(1,\ 0,\ 0)+\frac{p+q-5}{2}(1,\ 1,\ 1)-(5,\ p-2,\ q-3)$$
$$=\frac{1}{2}(0,\ -p+q-1,\ p-q+1)$$

これより，$|\overrightarrow{PH}|^2=\dfrac{1}{4}\{(-p+q-1)^2+(p-q+1)^2\}=\dfrac{1}{2}(p-q+1)^2$となり，

$$PH=\frac{1}{\sqrt{2}}|p-q+1|$$

(2)　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\times 27-36}=3\sqrt{2}$

これより，四面体 ABCP の体積Vは，(1)の結果を用いると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}|p-q+1|=|p-q+1|$$

条件より，$(p-9)^2+(q-7)^2=1$なので，$p=9+\cos\theta$，$q=7+\sin\theta$とおけ，

$$V=|9+\cos\theta-7-\sin\theta+1|=|3-\sin\theta+\cos\theta|=\left|3-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$
$$=3-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，Vの最大値は$3+\sqrt{2}$，最小値は$3-\sqrt{2}$である。

［解　説］

計算量はやや多めですが，空間図形の標準的な典型問題です。なお，(1)は平面αの方程式を求めた後，点と平面の距離の公式という手もありますが……。

© 電送数学舎 2019

4

問題のページへ

(1)　0 でない 2 つの整式 $f(x)$ を m 次式，$g(x)$ を n 次式とおき，

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7\cdots\cdots①,\quad g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2\cdots\cdots②$$

まず，①について，左辺の $f(x^2)$ の次数は $2m$，右辺の $(x^2+2)g(x)+7$ の次数は $2+n$ から，$2m=2+n$ すなわち $n=2m-2\cdots\cdots③$となる。

ここで，$n>2$ と仮定すると，③から n は偶数なので，$n\geqq 4$ である。このとき③から，$m\geqq 3$ となる。

また，②について，左辺の $g(x^3)$ の次数は $3n=6m-6$，右辺の $x^4f(x)$ の次数は $4+m\geqq 7$，$-3x^2g(x)$ の次数は $2+n=2m\geqq 6$，$-6x^2-2$ の次数は 2 である。

(i)　$4+m>2m\ (m<4)$ のとき

②の次数を比べると，$6m-6=4+m$ から $m=2$ となり $m\geqq 3$ を満たさない。

(ii)　$4+m=2m\ (m=4)$ のとき

②の左辺の次数は 18，右辺の次数は 8 以下となるので，②は成り立たない。

(iii)　$4+m<2m\ (m>4)$ のとき

②の次数を比べると，$6m-6=2m$ から $2m=3$ となり整数 m は存在しない。

(i)〜(iii)より，$n>2$ のときは成立しないので $n\leqq 2$ となり，③から $m\leqq 2$ である。

以上より，$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下である。

(2)　(1)の結果と③から，$(m,\ n)=(1,\ 0)$，$(2,\ 2)$ である。

(a)　$(m,\ n)=(1,\ 0)$ のとき

②について，左辺は 0 でない定数，右辺は 5 次式になるので，成立しない。

(b)　$(m,\ n)=(2,\ 2)$ のとき

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，$g(x)=px^2+qx+r\ (p\neq 0)$ とおく。

①から，$ax^4+bx^2+c=(x^2+2)(px^2+qx+r)+7$ となり，係数を比べて，

$$a=p,\ 0=q,\ b=2p+r,\ 0=2q,\ c=2r+7$$

すると，$r=b-2p=-2a+b$，$c=2(-2a+b)+7=-4a+2b+7$ となるので，

$$f(x)=ax^2+bx-4a+2b+7,\ g(x)=ax^2-2a+b\quad (a\neq 0)$$

②に代入すると，

$$ax^6-2a+b=x^4(ax^2+bx-4a+2b+7)-3x^2(ax^2-2a+b)-6x^2-2$$
$$ax^6-2a+b=ax^6+bx^5-(7a-2b-7)x^4+3(2a-b-2)x^2-2$$

係数を比べて，$b=0$，$a=1$ となるので，

$$f(x)=x^2+3,\ g(x)=x^2-2$$

［解 説］

整式の決定という問題ですが，まず次数を定めるという処理をするタイプです。

© 電送数学舎 2019