1

解答解説のページへ

定数$a<1$に対し，放物線$C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-x^2+a$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線C_1，C_2の両方に接する2つの直線の方程式をそれぞれaを用いて表せ。

(2)　C_1と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積をS_1，C_2と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積をS_2とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

座標平面上に原点 O，点 A$(1,\ a)$，点 B$(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1)　$a=1$ のとき，△OAB が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2)　$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3)　△OAB が正三角形であり，a が有理数であるとき，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。

3

解答解説のページへ

A と B の 2 人が A, B, A, B, …の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2)　さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3)　自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

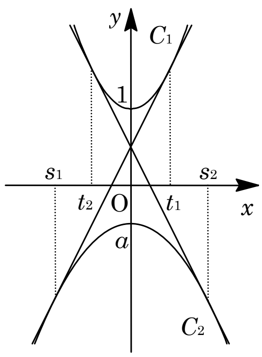
(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

1

問題のページへ



(1)　放物線 $C_1: y=2x^2+1$ ……①，$C_2: y=-x^2+a$ ……②の共通接線に対して，C_1，C_2 上の接点をそれぞれ $(t,\ 2t^2+1)$，$(s,\ -s^2+a)$ とおく。

①より，$y'=4x$ から接線の方程式は，

$$y-(2t^2+1)=4t(x-t)\,,\ \ y=4tx-2t^2+1 \cdots\cdots ③$$

②より，$y'=-2x$ から接線の方程式は，

$$y-(-s^2+a)=-2s(x-s)$$

$$y=-2sx+s^2+a \cdots\cdots ④$$

③④が一致することより，

$$4t=-2s \cdots\cdots ⑤,\ \ -2t^2+1=s^2+a \cdots\cdots ⑥$$

⑤から $s=-2t$ となり，⑥に代入すると，$-2t^2+1=4t^2+a$ から，

$$t^2=\frac{1-a}{6}\,,\ \ t=\pm\sqrt{\frac{1-a}{6}}$$

よって，共通接線は，③から $y=\pm 4\sqrt{\frac{1-a}{6}}\,x-2\cdot\frac{1-a}{6}+1$ となり，

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{6-6a}\,x+\frac{a+2}{3},\ \ y=-\frac{2}{3}\sqrt{6-6a}\,x+\frac{a+2}{3}$$

(2)　右上図のように，接点の x 座標を $t_1=\sqrt{\frac{1-a}{6}}$，$s_1=-2t_1$ とおき，C_1，C_2 と 2 本の共通接線で囲まれた図形の面積を，それぞれ S_1，S_2 とする。

すると，y 軸に関する対称性から，

$$S_1=2\int_0^{t_1}\{2x^2+1-(4t_1x-2{t_1}^2+1)\}dx=4\int_0^{t_1}(x-t_1)^2dx$$

$$=\frac{4}{3}\big[(x-t_1)^3\big]_0^{t_1}=\frac{4}{3}{t_1}^3$$

$$S_2=2\int_{s_1}^{0}\{-2s_1x+{s_1}^2+a-(-x^2+a)\}dx=2\int_{s_1}^{0}(x-s_1)^2dx$$

$$=\frac{2}{3}\big[(x-s_1)^3\big]_{s_1}^{0}=-\frac{2}{3}{s_1}^3=\frac{16}{3}{t_1}^3$$

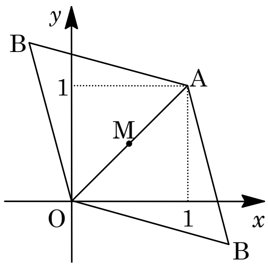
これより，$\frac{S_2}{S_1}=\frac{16}{4}=4$ となる。

［解　説］

放物線と接線で囲まれる図形の面積という頻出の構図です。なお，(1)では重解条件を利用しても構いません。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　原点 O，A$(1,\ a)$，B$(s,\ t)$に対し，辺 OA の中点を M とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な単位ベクトルを$\vec{n}$とする。

ここで，正三角形 OAB に対し，$a=1$のとき，$\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)$，$\mathrm{MB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OA}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\vec{n}$$

$$=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，$s=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，$t=\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$（複号同順）

(2)　$\sqrt{3}$が無理数でないとすると，p, qを互いに素な自然数として$\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$とおけ，

$$\sqrt{3}p=q,\ \ 3p^2=q^2$$

すると，q^2は 3 の倍数，すなわちqは 3 の倍数となる。

これより，kを自然数として，$q=3k$とおけ，

$$3p^2=9k^2,\ \ p^2=3k^2$$

すると，p^2は 3 の倍数，すなわちpも 3 の倍数となり，$p,\ q$が互いに素ということに反する。よって，$\sqrt{3}$は無理数である。

(3)　(1)と同様にすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$，$\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1)$，$\mathrm{MB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+1}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，$s=\dfrac{1\pm\sqrt{3}a}{2}$，$t=\dfrac{a\mp\sqrt{3}}{2}$（複号同順）………①

さて，aが有理数であるとき，①から$\pm\sqrt{3}=a-2t$………②

ここで，tが有理数であると仮定すると，②の右辺は有理数となり，(2)の結論に反する。したがって，tは無理数である。

すなわち，sとtのうち少なくとも 1 つは無理数である。

［解　説］

図形と式に実数の性質が融合した問題です。(1)(2)が(3)への誘導でしょうが，何か肩すかしを食らったような……。

3

問題のページへ

(1)　さいころを投げた回数が n 回以下で勝敗が決まらない条件は，n 回とも 1 または 2 が出たときで，その確率 p_n は，$p_n=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

ここで，$p_n<0.005$ となるのは，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<\dfrac{1}{200}$ から $\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<\log_{10}\dfrac{1}{200}$ となり，

$$-n\log_{10}3<-(2+\log_{10}2)\,,\ \ n>\frac{2+\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{2+0.301}{0.477}>4.8$$

したがって，求める最小の n は $n=5$ である。

(2)　さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つのは，

(i)　1 回目で A が勝つとき　このときの確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

(ii)　3 回目で A が勝つとき　このときの確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$ である。

(i)(ii)より，求める確率は $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{20}{27}$ となる。

(3)　自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つのは，(2)と同様に，A が 1 回目, 3 回目, 5 回目，…，$2k+1$ 回目で勝つ場合を考え，その確率を P とすると，

$$P=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left\{1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}\right\}$$

［解　説］

確率の基本題です。裏があるのかと勘繰ってしまいそうですが。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　自然数 a と b の最大公約数を $G(a,\ b)$ と表すと，ユークリッドの互除法より，

$$G(2017,\ 225)=G(225,\ 217)=G(217,\ 8)$$
$$=G(8,\ 1)=1$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 8\overline{)217} \\ 16 \\ \hline 57 \\ 56 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 217\overline{)225} \\ 217 \\ \hline 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 225\overline{)2017} \\ 1800 \\ \hline 217 \end{array}$$

(2)　$15=3\times5$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$15\times1,\ 15\times2,\ 15\times3,\ \cdots,\ 15\times134$$

すると，$225=3^2\times5^2$ から，225 との最大公約数が 15 である自然数の個数は，134 以下の自然数で 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数となる。

ここで，134 以下の自然数で 3 の倍数となるものが 44 個，5 の倍数となるものが 26 個，15 の倍数となるものが 8 個である。

よって，求める自然数の個数は，$134-(44+26-8)=72$ である。

(3)　$111=3\times37$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$111\times1,\ 111\times2,\ 111\times3,\ \cdots,\ 111\times18$$

すると，$1998=111\times2\times3^2$ から，1998 との最大公約数が 111 の自然数は，18 以下の自然数で 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数と 111 との積になり，

$$111\times1,\ 111\times5,\ 111\times7,\ 111\times11,\ 111\times13,\ 111\times17$$

さらに，225 との最大公約数が 15 から，求める自然数は $111\times5=555$ である。

［解　説］

約数と倍数の問題です。(1)は年度の数が題材になっているため，2017 が素数という知識をもっていたとしても不思議ではありません。ただ，これをストレートに利用して，いきなり結論とするのは避けた方がよいでしょう。「ふるい」にかけて示せば別ですが。