1　　解答解説のページへ

四面体 OABC が次を満たすとする。

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1,\ \angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{ACB},\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ$$

このとき，四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

n 個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_3 を求めよ。

(2)　p_4 を求めよ。

$\boxed{3}$　解答解説のページへ

a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2 \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$\boxed{4}$　解答解説のページへ

　ある自然数を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった。このような自然数で最大のものを求めよ。ただし，必要なら次を用いてもよい。 $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$，$0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$

$\boxed{5}$

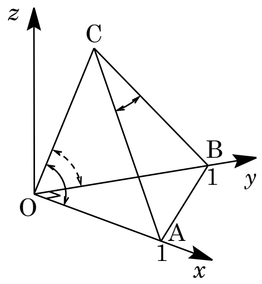
解答解説のページへ

関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフの $x>1$ の部分を C とする。このとき，下の条件を満たすような正の実数 a, b について，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域の面積を求めよ。

「C と直線 $y=ax+b$ は 2 つの異なる共有点をもつ」

1

問題のページへ



まず，OA = OB = 1，∠AOB = 90° より，O を原点とし，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0) とおく。

また，C$(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ として，OC = 1 から，

$$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots\cdots①$$

$$\cos\angle\mathrm{COA}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=x\ ,\quad \cos\angle\mathrm{COB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=y$$ と

なり，∠COA = ∠COB から，$x=y \cdots\cdots\cdots②$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1-x,\ -y,\ -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-x,\ 1-y,\ -z)$ から，①②を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}=\frac{-x(1-x)-y(1-y)+z^2}{\sqrt{(1-x)^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+(1-y)^2+z^2}}$$

$$=\frac{1-x-y}{\sqrt{1-2x+1}\sqrt{1-2y+1}}=\frac{1-x-y}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-y}}=\frac{1-2x}{2(1-x)}$$

すると，∠COA = ∠ACB より $x=\dfrac{1-2x}{2(1-x)}$ となり，$2x(1-x)=1-2x$ から，

$$2x^2-4x+1=0$$

$1-x>0$ $(x<1)$ より，$x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ である。

①②から，$z^2=1-2x^2=1-2\cdot\dfrac{6-4\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}-2$ となり，$z>0$ より，

$$z=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

これより，四面体 OABC の体積 V は，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2=\dfrac{1}{2}$ から，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-2}=\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

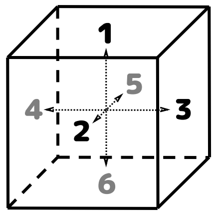
［解　説］

空間ベクトルの問題です。解答例では，条件の OA = OB = 1 と ∠AOB = 90° をみて，座標系を設定しました。

2

問題のページへ

まず，右図のように，立方体の面に，1 と 6，2 と 5，3 と 4 が対面になるように印をつける。そして，辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られることを「塗り分ける」とよぶ。



(1)　3 色 A，B，C を用意し，立方体の各面を塗るとき，3^6 通りの場合が同様に確からしいとする。

まず，2 色以下では立方体を塗り分けられないので，3 色すべてを用いる。

塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 が同色のときだけで 1 通りとなり，このときの面と色との対応は $3!$ 通りある。

すると，3 色を用意したとき，立方体を塗り分ける確率 p_3 は，

$$p_3=\frac{1\times 3!}{3^6}=\frac{2}{243}$$

(2)　4 色 A，B，C，D を用意し，立方体の各面を塗るとき，4^6 通りの場合が同様に確からしいとする。このとき，立方体を塗り分けるには，3 色または 4 色が必要で，

(i)　3 色で塗るとき

3 色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通りで，塗り分け方は(1)と同様に $1\times 3!$ 通りずつある。

すると，3 色で塗り分けるときの確率は $\dfrac{4\times 1\times 3!}{4^6}=\dfrac{3}{2^9}$ となる。

(ii)　4 色で塗るとき

塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 のうち，2 組の対面が同色のときで，その対面の選び方より ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。そして，このときの面と色との対応は $4!$ 通りずつある。

すると，4 色で塗り分けるときの確率は $\dfrac{3\times 4!}{4^6}=\dfrac{9}{2^9}$ となる。

(i)(ii)より，4 色を用意したとき，立方体を塗り分ける確率 p_4 は，

$$p_4=\frac{3}{2^9}+\frac{9}{2^9}=\frac{3}{2^7}=\frac{3}{128}$$

［解　説］

塗り分けを題材にした確率の問題です。さいころと同じように各面に印をつけて考えています。なお，(2)は(i)の場合について要注意です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

$a>0$ のとき，$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\dfrac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\dfrac{3}{4}a^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ に対して，まず

$x^2-\left(ax+\dfrac{3}{4}a^2\right)=\dfrac{1}{4}(4x^2-4ax-3a^2)=\dfrac{1}{4}(2x+a)(2x-3a)$ なので，

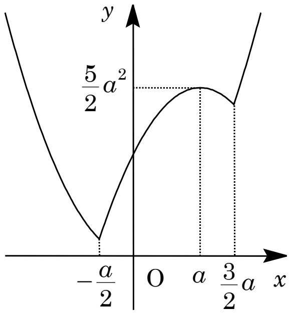
(a)　$x\leqq-\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{3}{2}a\leqq x$ のとき

$$f(x)=x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2=x^2$$

(b)　$-\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{3}{2}a$ のとき

$$f(x)=-x^2+\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2$$

$$=-x^2+2ax+\frac{3}{2}a^2=-(x-a)^2+\frac{5}{2}a^2$$



(a)(b)より，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。

ここで，$-\dfrac{a}{2}$，a，$\dfrac{3}{2}a$ と $-1,\ 1$ との大小関係を考え，$f(x)$ の最大値を M とおくと，

(i)　$\dfrac{3}{2}a<1\left(0<a<\dfrac{2}{3}\right)$ のとき　$-1<-\dfrac{a}{2}<a<\dfrac{3}{2}a<1$ となり，

$$f(a)=\frac{5}{2}a^2,\ f(-1)=f(1)=1$$

(i-i)　$\dfrac{5}{2}a^2\geqq 1\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\leqq a<\dfrac{2}{3}\right)$ のとき　$M=f(a)=\dfrac{5}{2}a^2$

(i-ii)　$\dfrac{5}{2}a^2<1\left(0<a<\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ のとき　$M=f(\pm1)=1$

(ii)　$\dfrac{3}{2}a\geqq 1$ かつ $a<1\left(\dfrac{2}{3}\leqq a<1\right)$ のとき　$-1<-\dfrac{a}{2}<a<1\leqq\dfrac{3}{2}a$ となり，

$$f(a)=\frac{5}{2}a^2,\ f(-1)=1$$

このとき，$\dfrac{5}{2}a^2\geqq\dfrac{10}{9}>1$ より，$M=f(a)=\dfrac{5}{2}a^2$

(iii)　$a\geqq 1$ かつ $-\dfrac{a}{2}>-1\ (1\leqq a<2)$ のとき　$-1<-\dfrac{a}{2}<1\leqq a<\dfrac{3}{2}a$ となり，

$$f(-1)=1,\ f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$$

このとき，$\dfrac{3}{2}a^2+2a-1\geqq\dfrac{3}{2}+2-1>1$ より，$M=f(1)=\dfrac{3}{2}a^2+2a-1$

(iv)　$-\dfrac{a}{2}\leqq-1\ (a\geqq 2)$ のとき　$-\dfrac{a}{2}\leqq-1<1<a<\dfrac{3}{2}a$ となり，

$$M=f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$$

(i)～(iv)より，$f(x)$ の最大値 M は，

$0<a<\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ のとき $M=1$，$\dfrac{\sqrt{10}}{5}\leqq a<1$ のとき $M=\dfrac{5}{2}a^2$

$a\geqq 1$ のとき $M=\dfrac{3}{2}a^2+2a-1$

［解 説］

絶対値付き関数の最大値を求める問題です。グラフを見ながら，a の値で場合分けをして処理しています。

4

問題のページへ

自然数 N を八進法，九進法，十進法で表したとき，いずれも k 桁であるとすると，

$$8^{k-1} \leqq N < 8^k \cdots\cdots ①,\ \ 9^{k-1} \leqq N < 9^k \cdots\cdots ②,\ \ 10^{k-1} \leqq N < 10^k \cdots\cdots ③$$

$k \geqq 2$ で，$8^{k-1} < 9^{k-1} < 10^{k-1}$，$8^k < 9^k < 10^k$ から，①②③を満たす N が存在するためには，$10^{k-1} < 8^k \cdots\cdots ④$が必要である。すると，

$$\log_{10} 10^{k-1} < \log_{10} 8^k,\ \ k-1 < 3k\log_{10} 2,\ \ (1-3\log_{10} 2)k < 1$$

ここで，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ から，$0.0967 < 1-3\log_{10} 2 < 0.097$ となり，

$$k < \frac{1}{1-3\log_{10} 2}$$

$10.3 < \dfrac{1}{1-3\log_{10} 2} < 10.4$ から，④を満たす最大の整数 k は $k = 10$ である。

逆に，$k = 10$ のとき，①②③は $8^9 \leqq N < 8^{10}$，$9^9 \leqq N < 9^{10}$，$10^9 \leqq N < 10^{10}$ となり，④から $10^9 < 8^{10}$ であるので，N が満たす範囲は，

$$10^9 \leqq N < 8^{10},\ \ 10^9 \leqq N \leqq 8^{10}-1$$

したがって，最大の自然数 N は $8^{10}-1$ である。

［解　説］

整数と対数計算の融合問題です。数直線を利用して，連立不等式が解をもつ条件を考えています。

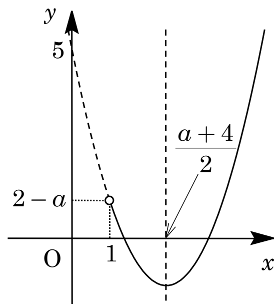
$\boxed{5}$

問題のページへ

$C: y=x^2-4x+5\ (x>1)$ ……①と直線 $y=ax+b$ ……②が 2 つの異なる共有点をもつのは，①②を連立し，$x^2-4x+5=ax+b$ すなわち $x^2-(a+4)x+5=b$ ……③が，$x>1$ において 2 つの異なる実数解をもつことに対応する。

さて，$f(x)=x^2-(a+4)x+5$ とおくと，

$$f(x)=\left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(a+4)^2+5$$



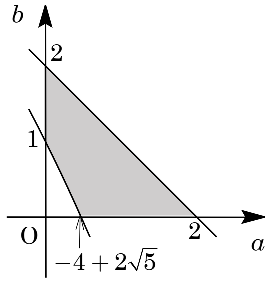
$a>0$ より $\dfrac{a+4}{2}>2$ となり，また③が $x>1$ に 2 つの異なる実数解をもつためには，$b>0$ から $f(1)=2-a>0$ が必要である。すると，$0<a<2$ において，

(i)　$-\dfrac{1}{4}(a+4)^2+5\leqq 0\ (-4+2\sqrt{5}\leqq a<2)$ のとき

求める条件は，$0<b<2-a$ となる。

(ii)　$-\dfrac{1}{4}(a+4)^2+5>0\ (0<a<-4+2\sqrt{5})$ のとき

求める条件は，$-\dfrac{1}{4}(a+4)^2+5<b<2-a$ となる。



(i)(ii)より，点 $(a,\ b)$ が動く領域は右図の網点部である。

ただし，境界は含まない。

そして，この領域の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\int_0^{-4+2\sqrt{5}}\left\{-\frac{1}{4}(a+4)^2+5\right\}da=2+\Big[\frac{1}{12}(a+4)^3-5a\Big]_0^{-4+2\sqrt{5}}$$

$$=2+\frac{1}{12}(40\sqrt{5}-64)-5(-4+2\sqrt{5})=\frac{50}{3}-\frac{20}{3}\sqrt{5}=\frac{10}{3}(5-2\sqrt{5})$$

［解　説］

放物線と直線が題材ですが，内容は 2 次方程式の解の配置の問題です。また，最後の面積計算も難しくはありません。