$\boxed{1}$

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ の値を求めよ。

(2) 整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。点 D, P, Q を次のように定める。点 D は$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を満たし，点 P は線分 OA を$1:2$に内分し，点 Q は線分 OB の中点である。さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点をもつように定める。このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比$\mathrm{OR}:\mathrm{RD}$を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。1 個のさいころを n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とし，n 個の数の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を Y とする。

(1) Y が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2) Y が 15 で割り切れる確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ただし，e は自然対数の底であり，その値は $e=2.71\cdots$ である。

5

解答解説のページへ

O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件(a)，(b)，(c)を満たしている。

(a)　点 P は x 軸上にある。

(b)　点 Q は yz 平面上にある。

(c)　線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である。

点 P と点 Q が条件(a)，(b)，(c)を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

p を 3 以上の素数とする。また，θ を実数とする。

(1)　$\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ。

(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m, n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ。

$\boxed{1}$　　問題のページへ

(1)　$I=\int_1^4\sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ とし，$\sqrt{x}=t\ (x=t^2)$ とおくと $dx=2t\,dt$ となり，

$$I=\int_1^2 t\log(t^4)\cdot 2t\,dt=8\int_1^2 t^2\log t\,dt=8\Big[\frac{t^3}{3}\log t\Big]_1^2-8\int_1^2\frac{t^3}{3}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\frac{64}{3}\log 2-\frac{8}{3}\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_1^2=\frac{64}{3}\log 2-\frac{8}{9}(8-1)=\frac{64}{3}\log 2-\frac{56}{9}$$

(2)　まず，$x^{2023}-1=(x-1)(x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^2+x+1)$

ここで，$f(x)=x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^2+x+1$，$g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ とおき，$f(x)$ を $g(x)$ で割ると，

$$f(x)=g(x)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+x^2+x+1$$

すると，$x^{2023}-1=(x-1)f(x)$ なので，

$$\begin{aligned}x^{2023}-1&=(x-1)\{g(x)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+x^2+x+1\}\\&=g(x)(x-1)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+(x-1)(x^2+x+1)\\&=g(x)(x-1)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+(x^3-1)\end{aligned}$$

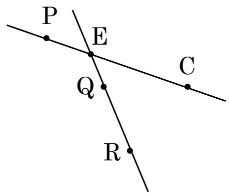
よって，$x^{2023}-1$ を $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りは x^3-1 である。

［解 説］

(1)は基本的な定積分の計算です。(2)は整式の除法の問題です。冒頭の因数分解がポイントです。

$\boxed{2}$

問題のページへ



条件より，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

ここで，k を実数として，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OD}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OA}+2k\overrightarrow{OB}+3k\overrightarrow{OC}$$

直線 QR と直線 PC が交点 E をもつとき，ある実数 $s,\ t$ で，

$$\overrightarrow{OE}=s\overrightarrow{OR}+(1-s)\overrightarrow{OQ}=s(k\overrightarrow{OA}+2k\overrightarrow{OB}+3k\overrightarrow{OC})+\frac{1}{2}(1-s)\overrightarrow{OB}$$

$$=ks\overrightarrow{OA}+\left(2ks-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}+3ks\overrightarrow{OC}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OP}+(1-t)\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OC}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$ks=\frac{1}{3}t\cdots\cdots③,\quad 2ks-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}=0\cdots\cdots④,\quad 3ks=1-t\cdots\cdots⑤$$

③⑤より $t=1-t$ となり，$t=\frac{1}{2}$，$ks=\frac{1}{6}$ である。そして，④に代入すると，

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}=0,\quad \frac{1}{2}s=\frac{5}{6},\quad s=\frac{5}{3}$$

すると，$\frac{5}{3}k=\frac{1}{6}$ から $k=\frac{1}{10}$ となり，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{10}\overrightarrow{OD}$ なので，

$$\mathrm{OR}:\mathrm{RD}=\frac{1}{10}:1-\frac{1}{10}=1:9$$

［解　説］

空間ベクトルの基本題です。計算も難しくはありません。

3

問題のページへ

(1) さいころを n 回投げ，出た目を X_1，X_2，…，X_n として $Y=X_1X_2\cdots X_n$ とおく。

Y が 5 で割り切れる事象を A とおくと，$P(\overline{A})=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ より，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2) Y が 3 で割り切れる事象を B とおくと，$P(\overline{B})=\left(\dfrac{4}{6}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となり，

ここで，5 と 3 は互いに素なので，Y が 15 で割り切れる事象は $A\cap B$ となり，

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

さて，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は Y が 5 でも 3 でも割り切れない事象を表すので，

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，$P(A\cap B)=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。

[解　説]

余事象の確率と加法定理を組み合わせた頻出有名問題です。

4

問題のページへ

$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) = e^{-x^2} + \dfrac{1}{4}x^2 + 1 + \dfrac{1}{e^{-x^2} + \dfrac{1}{4}x^2 + 1}$

ここで，$t = e^{-x^2} + \dfrac{1}{4}x^2 + 1\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx} = -2xe^{-x^2} + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x(4e^{-x^2} - 1)$$

すると，$4e^{-x^2} \geqq 4e^{-1} = \dfrac{4}{e} > \dfrac{4}{2.8} > 1$ なので，t の増減は右表のようになり，

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\dfrac{dt}{dx}$		$+$	0	$-$	
t	$\dfrac{1}{e}+\dfrac{5}{4}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{1}{e}+\dfrac{5}{4}$

$$\frac{1}{e} + \frac{5}{4} \leqq t \leqq 2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$f(x) = g(t)$ とおくと，$(*)$において $g(t) = t + \dfrac{1}{t}$ となり，

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t+1)(t-1)}{t^2}$$

すると，$\dfrac{1}{e} + \dfrac{5}{4} > 1$ から，$(*)$において $g'(t) > 0$ となり，$g(t)$ は単調に増加する。

これより，最大値は $g(2) = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$，最小値は $g\left(\dfrac{1}{e} + \dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{4e}{5e+4}$ となる。

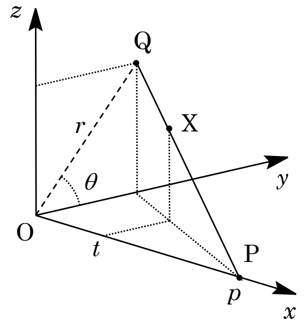
よって，$f(x)$ の最大値は $f(0) = \dfrac{5}{2}$，最小値は $f(\pm 1) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{4e}{5e+4}$ である。

［解 説］

微分と増減の問題です。見た目に反し，計算は複雑ではありませんでした。

5

問題のページへ



条件(a)(b)から，P$(p,\ 0,\ 0)$ とし，また $r \geqq 0$，θ を任意の実数として，Q$(0,\ r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおく。

さらに，条件(c)から $p+r=1$ となり，$r=1-p$ から，

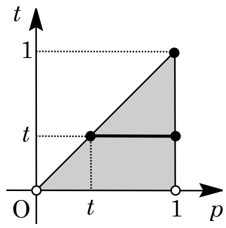
$$\mathrm{Q}(0,\ (1-p)\cos\theta,\ (1-p)\sin\theta)\quad (p \leqq 1)$$

(i)　$p=0$ のとき

線分 PQ が通過してできる図形は，yz 平面上で，原点を中心とする半径 1 の円の周または内部である。

(ii)　$0 < p \leqq 1$ のとき

線分 PQ と平面 $x=t$ $(0 < t \leqq p \leqq 1)$ との交点を X とおくと，点 X は線分 QP を $t : p-t$ に内分し，



$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{t\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(p-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{t+(p-t)} = \frac{t}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{p-t}{p}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$= \frac{t}{p}(p,\ 0,\ 0) + \frac{p-t}{p}(0,\ (1-p)\cos\theta,\ (1-p)\sin\theta)$$

$$= (t,\ 0,\ 0) + \left(1-\frac{t}{p}\right)(1-p)(0,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$$

これより，点 X は平面 $x=t$ 上で，中心 $(t,\ 0,\ 0)$，半径 $\left(1-\frac{t}{p}\right)(1-p)$ の円を描く。

そこで，$f(p) = \left(1-\frac{t}{p}\right)(1-p) = -p+(t+1)-\frac{t}{p}$ $(t \leqq p \leqq 1)$ とおくと，

$$f'(p) = -1+\frac{t}{p^2}$$

$$= -\frac{(p+\sqrt{t})(p-\sqrt{t})}{p^2}$$

p	t	$\cdots$	$\sqrt{t}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	0	↗	$(1-\sqrt{t})^2$	↘	0

すると，$f(p)$ の増減は右表のようになり，平面 $x=t$ 上で線分 PQ の動きうる範囲の面積 $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = \pi\{(1-\sqrt{t})^2\}^2 = \pi(1-\sqrt{t})^4 \cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$t=0$ のときは，線分 PQ の動きうる範囲は，(i)の $p=0$ のときも合わせて考えると，その面積は $\pi\cdot 1^2 = \pi$ となるが，この場合も$(*)$は成り立っている。

したがって，線分 PQ が通過してできる立体の体積を V とすると，yz 平面についての対称性から，

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = 2\pi\int_0^1 (1-\sqrt{t})^4\,dt = 2\pi\int_0^1 (1-4t^{\frac{1}{2}}+6t-4t^{\frac{3}{2}}+t^2)\,dt$$

$$= 2\pi\left[t-\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}+3t^2-\frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(1-\frac{8}{3}+3-\frac{8}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}\pi$$

［解 説］

線分の通過領域の体積を求める問題です。x 軸に垂直な断面をもとに処理をしています。

6

問題のページへ

(1)　$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = \cos 2\theta\cos\theta + \dfrac{1}{2}(\cos 3\theta - \cos\theta)$

すると，$2\cos 3\theta = 2\cos 2\theta\cos\theta + \cos 3\theta - \cos\theta$ となり，

$$\cos 3\theta = 2\cos 2\theta\cos\theta - \cos\theta = 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

同様に，$\cos 4\theta = \cos 3\theta\cos\theta - \sin 3\theta\sin\theta = \cos 3\theta\cos\theta + \dfrac{1}{2}(\cos 4\theta - \cos 2\theta)$ から，

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos 3\theta\cos\theta - \cos 2\theta = 2\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - (2\cos^2\theta - 1)\\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{p}$（$p$ は 3 以上の素数）のとき，ある正の整数 $m,\ n$ で $\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ が成り立つと仮定すると，$n\theta = m\pi$ から，

$$\cos n\theta = \cos m\pi = (-1)^m \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\cos n\theta$ が $\cos\theta$ についての整数係数の n 次式，すなわち整数係数の n 次式 $f_n(x)$ を用いて，$\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$ と表されることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n = 1,\ 2$ のとき

$\cos 1\theta = \cos\theta$，$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ なので，$f_1(x) = x$，$f_2(x) = 2x^2 - 1$ となり，$n = 1,\ 2$ のときに成立している。

(ii)　$n = k,\ k+1$ のとき

$f_k(x)$ を整数係数の k 次式，$f_{k+1}(x)$ を整数係数の $k+1$ 次式として，$\cos k\theta = f_k(\cos\theta)$，$\cos(k+1)\theta = f_{k+1}(\cos\theta)$ と仮定する。

そこで，(1)と同様に，$\cos(k+2)\theta = \cos\{(k+1)\theta + \theta\}$ について，

$$\begin{aligned}\cos(k+2)\theta &= \cos(k+1)\theta\cos\theta - \sin(k+1)\theta\sin\theta\\ &= \cos(k+1)\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\{\cos(k+2)\theta - \cos k\theta\}\end{aligned}$$

すると，$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta\cos(k+1)\theta - \cos k\theta$ となり，

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta\, f_{k+1}(\cos\theta) - f_k(\cos\theta) \cdots\cdots\cdots ②$$

これより，$\cos(k+2)\theta$ は $\cos\theta$ についての整数係数の $k+2$ 次式として表される。

(i)(ii)より，$\cos n\theta$ は $\cos\theta$ についての整数係数の n 次式として表される。

次に，$f_n(x)$ の最高次の係数を考えると，$f_1(x)$ は 1，$f_2(x)$ は 2 である。

ここで，②より，$f_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, f_{n+1}(\cos\theta) - f_n(\cos\theta)$ なので，

$$f_{n+2}(x) = 2x\, f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

すると，$f_{n+2}(x)$ の最高次の係数は $f_{n+1}(x)$ の最高次の係数の 2 倍となるので，帰納的に，$f_n(x)$ の最高次の係数は 2^{n-1} である。

したがって，a_0，a_1，…，a_{n-1} を整数として，

$$f_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

これより，$\cos n\theta = f_n(\cos\theta) = 2^{n-1}\cos^n\theta + a_{n-1}\cos^{n-1}\theta + \cdots + a_1\cos\theta + a_0$ となるので，①が成り立つとすると，

$$2^{n-1}\cos^n\theta + a_{n-1}\cos^{n-1}\theta + \cdots + a_1\cos\theta + a_0 = (-1)^m$$

そして，$\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ から，$\dfrac{2^{n-1}}{p^n} + \dfrac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_1}{p} + a_0 = (-1)^m$

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &= (-1)^m p^n - a_{n-1}p - \cdots - a_1 p^{n-1} - a_0 p^n \\ &= p\{(-1)^m p^{n-1} - a_{n-1} - \cdots - a_1 p^{n-2} - a_0 p^{n-1}\} \cdots\cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

すると，③について，左辺は素因数 2 だけをもつ正の整数で，右辺は 3 以上の素数 p の倍数であるので成立しない。

以上より，①は成り立たない。すなわち，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m，n は存在しない。

［解 説］

三角関数を題材とした論証問題です。有名な題材をベースにした出題ですが，経験がないと無理でしょう。なお，(1)は 2 倍角の公式などで普通に処理してもよかったのですが，ここでは(2)の誘導とみなした式変形をしています。不必要な忖度だったかもしれません。