1

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2) 次の式の分母を有理化し，分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ。

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$$

2

解答解説のページへ

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。点 D, P, Q を次のように定める。点 D は$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を満たし，点 P は線分 OA を$1:2$に内分し，点 Q は線分 OB の中点である。さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点をもつように定める。このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比$\mathrm{OR}:\mathrm{RD}$を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

(1)　$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ。

(2)　半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さが 1.15 より大きいか否かを理由を付けて判定せよ。

4

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は次の条件を満たしている。

$$a_1 = 3,\ \ a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1)\cdot 2^n \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$である。このとき，数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

整式 $f(x)$ が恒等式 $f(x)+\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)\,dy=2x^2+x+\dfrac{5}{3}$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の積が 5 で割り切れるのは，少なくとも 1 回 5 の目が出るときである。

すると，この確率は，$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ である。

(2) $P=\dfrac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$ として，$a=\sqrt[3]{3}$ とおくと $a^3=3$ となり，

$$P=\frac{55}{2a^2+a+5}=\frac{55a}{2\cdot 3+a^2+5a}=\frac{55a}{(a+2)(a+3)}$$

$$=\frac{55a(a^2-2a+4)(a^2-3a+9)}{(a+2)(a^2-2a+4)(a+3)(a^2-3a+9)}$$

$$=\frac{55(a^5-5a^4+19a^3-30a^2+36a)}{(a^3+8)(a^3+27)}$$

$$=\frac{55(3a^2-5\cdot 3a+19\cdot 3-30a^2+36a)}{(3+8)(3+27)}=\frac{-27a^2+21a+57}{6}$$

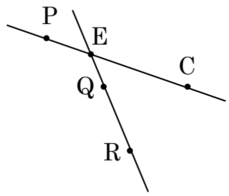
$$=\frac{-9a^2+7a+19}{2}=\frac{-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19}{2}$$

［解 説］

(1)は確率の基本題です。疑心暗鬼になりそうですが。(2)は 3 乗根の入った分母の有理化です。解答例では，乗法公式$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$を利用しました。

2

問題のページへ



条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ここで, k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

直線 QR と直線 PC が交点 E をもつとき，ある実数 s, t で,

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OR}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3k\overrightarrow{\mathrm{OC}})+\frac{1}{2}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=ks\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(2ks-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3ks\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立なので, ①②より,

$$ks=\frac{1}{3}t\cdots\cdots③,\quad 2ks-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}=0\cdots\cdots④,\quad 3ks=1-t\cdots\cdots⑤$$

③⑤より $t=1-t$ となり，$t=\frac{1}{2}$，$ks=\frac{1}{6}$ である。そして, ④に代入すると,

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}=0,\quad \frac{1}{2}s=\frac{5}{6},\quad s=\frac{5}{3}$$

すると，$\frac{5}{3}k=\frac{1}{6}$ から $k=\frac{1}{10}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ なので,

$$\mathrm{OR}:\mathrm{RD}=\frac{1}{10}:1-\frac{1}{10}=1:9$$

［解 説］

空間ベクトルの基本題です。計算も難しくはありません。

3

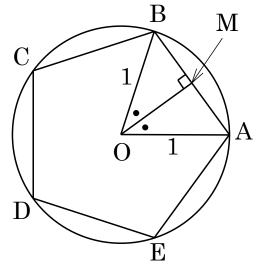
問題のページへ

(1)　$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

また，$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ なので，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

(2)　中心 O で半径 1 の円に内接する正五角形 ABCDE の 1 辺の長さを L とおく。そして, O から辺 AB に垂線を下ろし，辺 AB との交点を M とすると，点 M は辺 AB の中点であり，しかも $\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{BOM}$ なので，



$$L = 2\times\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{AOM} = 2\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{5}$$

ここで，$\theta = \dfrac{\pi}{5}$ とおくと，$5\theta = \pi$ から $3\theta = \pi - 2\theta$ となり，

$$\cos 3\theta = \cos(\pi - 2\theta)\,,\ \ \cos 3\theta = -\cos 2\theta\,,\ \ \cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$$

(1)から，$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 0$ となり，

$$(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$$

すると，$0 < \cos\theta < 1$ より，$\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ である。

さて，$L = 2\sin\theta$ と 1.15 の大小関係を調べるために，

$$\begin{aligned}L^2 - 1.15^2 &= 4\sin^2\theta - \Big(\frac{23}{20}\Big)^2 = 4\Big\{1 - \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)^2\Big\} - \frac{529}{400} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4} - \frac{529}{400}\\ &= \frac{1}{400}(1000 - 200\sqrt{5} - 529) = \frac{1}{400}(471 - 200\sqrt{5})\end{aligned}$$

ここで，$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ より $440 < 200\sqrt{5} < 460$ となるので，$L^2 - 1.15^2 > 0$ から $L > 1.15$ である。

［解　説］

正五角形の計量を題材にした頻出問題です。(1)はその誘導でしょうが，結論だけで終わりとするわけにはいかないでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

$n \geqq 2$ のとき $a_n = \dfrac{S_n}{n} + (n-1)\cdot 2^n$ から，$na_n = S_n + n(n-1)\cdot 2^n$ となり，

$$n(S_n - S_{n-1}) = S_n + n(n-1)\cdot 2^n\,,\ (n-1)S_n = nS_{n-1} + n(n-1)\cdot 2^n$$

これより，$\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{S_{n-1}}{n-1} + 2^n$ となり，$S_1 = a_1 = 3$ に注意すると，

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + \sum_{k=2}^{n} 2^k = 3 + \frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1} = 3 + 2^{n+1} - 4 = 2^{n+1} - 1$$

これより，$S_n = n(2^{n+1}-1)$ となる。

また，$n=1$ をあてはめると，$S_1 = 1\cdot(4-1) = 3$ となり，$n=1$ のときも成立する。

したがって，$n \geqq 2$ において，

$$a_n = \frac{n(2^{n+1}-1)}{n} + (n-1)\cdot 2^n = (2+n-1)\cdot 2^n - 1 = (n+1)\cdot 2^n - 1$$

なお，$n=1$ をあてはめると，$a_1 = 2\cdot 2 - 1 = 3$ となり，$n=1$ のときも成立する。

［解　説］

和と一般項の関係を利用する漸化式の問題です。与えられた式を，$\{a_n\}$ の関係式に変形する，$\{S_n\}$ の関係式に変形するという 2 つの方法が考えられます。両方とも試みましたが，前者では(等差)×(等比)タイプの数列の和が現れ面倒でしたので，上の解答例では後者で記しました。

5

問題のページへ

$f(x)+\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)dy=2x^2+x+\frac{5}{3}$ に対して，

$$f(x)+x^2\int_{-1}^{1}f(y)dy-2x\int_{-1}^{1}yf(y)dy+\int_{-1}^{1}y^2f(y)dy=2x^2+x+\frac{5}{3}$$

さて，$a=\int_{-1}^{1}f(y)dy$ ……①，$b=\int_{-1}^{1}yf(y)dy$ ……②，$c=\int_{-1}^{1}y^2f(y)dy$ ……③

とおくと，$f(x)+ax^2-2bx+c=2x^2+x+\frac{5}{3}$ となり，

$$f(x)=(2-a)x^2+(1+2b)x+\frac{5}{3}-c\ \cdots\cdots\cdots④$$

①と④，②と④，③と④を組み合わせて，

$$a=\int_{-1}^{1}\left\{(2-a)y^2+(1+2b)y+\frac{5}{3}-c\right\}dy=2\int_{0}^{1}\left\{(2-a)y^2+\frac{5}{3}-c\right\}dy$$

$$=2\Big[\frac{2-a}{3}y^3+\Big(\frac{5}{3}-c\Big)y\Big]_0^1=\frac{2(2-a)}{3}+2\Big(\frac{5}{3}-c\Big)=-\frac{2a}{3}-2c+\frac{14}{3}$$

これより，$3a=-2a-6c+14$ となり，$5a+6c=14$ ………⑤

$$b=\int_{-1}^{1}\left\{(2-a)y^3+(1+2b)y^2+\Big(\frac{5}{3}-c\Big)y\right\}dy=2\int_{0}^{1}(1+2b)y^2\,dy$$

$$=2\Big[\frac{1+2b}{3}y^3\Big]_0^1=\frac{2(1+2b)}{3}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}b$$

これより，$3b=2+4b$ となり，$b=-2$ ………⑥

$$c=\int_{-1}^{1}\left\{(2-a)y^4+(1+2b)y^3+\Big(\frac{5}{3}-c\Big)y^2\right\}dy$$

$$=2\int_{0}^{1}\left\{(2-a)y^4+\Big(\frac{5}{3}-c\Big)y^2\right\}dy=2\Big[\frac{2-a}{5}y^5+\frac{1}{3}\Big(\frac{5}{3}-c\Big)y^3\Big]_0^1$$

$$=\frac{2(2-a)}{5}+\frac{2}{3}\Big(\frac{5}{3}-c\Big)=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{3}c+\frac{86}{45}$$

これより，$45c=-18a-30c+86$ となり，$18a+75c=86$ ………⑦

すると，⑤⑦から $a=2$，$c=\frac{2}{3}$ となり，⑥と合わせて④に代入すると，

$$f(x)=(2-2)x^2+(1-4)x+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=-3x+1$$

［解 説］

いわゆる置換え型の積分方程式です。方針が決まると，後はていねいに計算するだけです。