1

解答解説のページへ

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

2

解答解説のページへ

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。このとき，$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

n を自然数とする。3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

四面体 OABC が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$ を満たしているとする。P を辺 BC 上の点とし，$\triangle\mathrm{OAP}$ の重心を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2)　P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

曲線 $C : y = \cos^3 x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$, x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O, および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) S を求めよ。

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ。そのときの t を α とすると，$f(\alpha) = \dfrac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$ を示せ。

6

解答解説のページへ

数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$を次の式

$$x_1=0,\ x_{n+1}=x_n+n+2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$y_{3m+1}=3m,\ y_{3m+2}=3m+2,\ y_{3m+3}=3m+4\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める。このとき，数列$\{x_n-y_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

$A=\log_4 2022$ とおくと，$2022=2\times1011$ より，

$$A=\frac{\log_{10}2022}{\log_{10}4}=\frac{\log_{10}2+\log_{10}1011}{2\log_{10}2}=\frac{1}{2}+\frac{\log_{10}1011}{2\log_{10}2}$$

ここで，$10^3<1011<2^{10}$ より，$3<\log_{10}1011<10\log_{10}2$ となり，

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2\log_{10}2}<A<\frac{1}{2}+\frac{10}{2}=5.5\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\log_{10}2}>0.5+\dfrac{3}{2\times0.3011}>0.5+4.9=5.4$ なので，$(*)$から，

$$5.4<A<5.5\,,\ 5.4<\log_4 2022<5.5$$

［解 説］

対数の値の評価式を証明する基本的な問題です。

2

問題のページへ

$n \geqq 5$ のとき，1 から n までの番号がついた n 枚の札から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。

このとき，$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ となるのは，$3 \leqq X+2 \leqq Y \leqq Z-2 \leqq n-2$ から，$Y=k\ (k=3,\ 4,\ \cdots,\ n-2)$ のとき，X については $X=1,\ 2,\ \cdots,\ k-2$ から $k-2$ 通り，Z については $Z=k+2,\ k+3,\ \cdots,\ n$ から $n-(k+2)+1=n-k-1$ 通りの場合がある。

すると，$Y=k$ のときの確率 p_k は，$p_k=\dfrac{(k-2)(n-k-1)}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{6(k-2)(n-k-1)}{n(n-1)(n-2)}$

したがって，求める確率を P とすると，

$$P=\sum_{k=3}^{n-2}p_k=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=3}^{n-2}(k-2)(n-k-1)$$

ここで，$k-2=l$ とおくと，

$$P=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{l=1}^{n-4}l(n-l-3)=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{l=1}^{n-4}\{(n-3)l-l^2\}$$

$$=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\left\{(n-3)\cdot\frac{1}{2}(n-4)(n-3)-\frac{1}{6}(n-4)(n-3)(2n-7)\right\}$$

$$=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}\{3(n-3)-(2n-7)\}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$

［解　説］

よく見かける確率の問題です。解答例では，Y の値をいったん固定して，場合の数を数えています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

3 つの整数n^2+2，n^4+2，n^6+2の公約数をp，またa, b, cを自然数として，

$$n^2+2=pa \cdots\cdots\cdots ①,\ n^4+2=pb \cdots\cdots\cdots ②,\ n^6+2=pc \cdots\cdots\cdots ③$$

①②より，$(pa-2)^2+2=pb$，$p^2a^2-4pa+4+2=pb$となり，

$$p(b+4a-pa^2)=6 \cdots\cdots\cdots ④$$

①③より，$(pa-2)^3+2=pc$，$p^3a^3-6p^2a^2+12pa-8+2=pc$となり，

$$p(p^2a^3-6pa^2+12a-c)=6 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④⑤より，pは 6 の正の約数 1, 2, 3, 6 のいずれかとなる。

以下，mod 6 で記すと，自然数nと 3 つの整数n^2，n^4，n^6の関係は右表のとおりである。

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	3	4	1
n^4	0	1	4	3	4	1
n^6	0	1	4	3	4	1

ここで，n^2+2，n^4+2，n^6+2の最大公約数をA_nとおくと，

(i)　$n\equiv 2$または$n\equiv 4$のとき

$n^2+2\equiv 0$，$n^4+2\equiv 0$，$n^6+2\equiv 0$となり，$A_n=6$である。

(ii)　$n\equiv 1$または$n\equiv 5$のとき

$n^2+2\equiv 3$，$n^4+2\equiv 3$，$n^6+2\equiv 3$となり，3 つの整数は 3 の倍数であるが，2 の倍数でも 6 の倍数でもないので，$A_n=3$である。

(iii)　$n\equiv 0$のとき

$n^2+2\equiv 2$，$n^4+2\equiv 2$，$n^6+2\equiv 2$となり，3 つの整数は 2 の倍数であるが，3 の倍数でも 6 の倍数でもないので，$A_n=2$である。

(iv)　$n\equiv 3$のとき

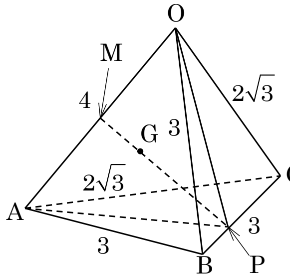
$n^2+2\equiv 5$，$n^4+2\equiv 5$，$n^6+2\equiv 5$となり，3 つの整数は 2 の倍数でも 3 の倍数でも 6 の倍数でもないので，$A_n=1$である。

［解　説］

頻出の整数問題です。冒頭で，互除法を用いて記述し，pが 6 の正の約数ということを示す方法もあります。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$OA=4$，$OB=AB=BC=3$，$OC=AC=2\sqrt{3}$ である四面体 OABC に対して, P を辺 BC 上の点, M を辺 OA の中点とし，$\triangle OAP$ の重心を G とする。

まず，$\triangle ABC$ と$\triangle OBC$ は合同なので $PA=PO$ が成り立ち，$\triangle POA$ は二等辺三角形である。

すると，中線 PM と辺 OA は直交するので，$\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$ である。

(2)　$PG:GM=2:1$ より，$PG=\frac{2}{3}PM=\frac{2}{3}\sqrt{PA^2-2^2}=\frac{2}{3}\sqrt{PA^2-4}$ ………(＊)

ここで，$\cos\angle ABC=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{1}{3}>0$ より，$\triangle ABC$ は鋭角三角形となるので, PA が最小となるのは，点 P が A から辺 BC の下ろした垂線と辺 BC との交点のときである。このとき，

$$PA=3\sin\angle ABC=3\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

よって，(＊)から，PG の最小値は $\dfrac{2}{3}\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}=\dfrac{4}{3}$ である。

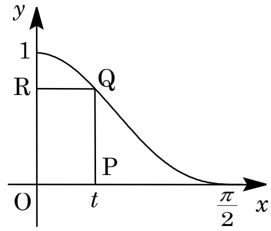
［解 説］

空間ベクトルの応用題としても解けますが，記述量を考えると，三角比の四面体への応用として処理した方がよいでしょう。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　曲線 $C : y=\cos^3 x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸, y 軸で囲まれる図形の面積 S は,



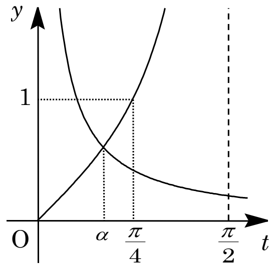
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$0<t<\frac{\pi}{2}$ において, 長方形 OPQR の面積 $f(t)$ は, $f(t)=t\cos^3 t$ となり,

$$f'(t)=\cos^3 t-3t\cos^2 t\sin t=\cos^2 t(\cos t-3t\sin t)$$

$$=3t\cos^3 t\left(\frac{1}{3t}-\tan t\right)$$



ここで, $y=\frac{1}{3t}$ と $y=\tan t$ のグラフを描くと右図のようになり, $0<t<\frac{\pi}{2}$ においてただ 1 つの交点をもつ。

この交点を $t=\alpha$ とおくと, $f(t)$ の増減は右表のようになり, $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

そして, $f'(\alpha)=0$ から $\cos\alpha=3\alpha\sin\alpha$ となり, $\alpha=\frac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}$ より, 最大値は,

$$f(\alpha)=\alpha\cos^3\alpha=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　①②より, $\frac{f(\alpha)}{S}=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\cdot\frac{3}{2}=\frac{(1-\sin^2\alpha)^2}{2\sin\alpha}$ となり, $g(u)=\frac{(1-u^2)^2}{2u}$ とおくと, $\frac{f(\alpha)}{S}=g(\sin\alpha)$ である。ただし, $0<u<1$ とする。

すると, $g(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}-2u+u^3\right)$ から,

$$g'(u)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u^2}-2+3u^2\right)=\frac{-1-2u^2+3u^4}{2u^2}=\frac{(3u^2+1)(u+1)(u-1)}{2u^2}$$

これより, $g'(u)<0$ なので, $g(u)$ は単調に減少する。

さて, $3.1<\pi<3.2$ から $3\pi>3\times3.1=9.3>4$ となり, $1=\tan\frac{\pi}{4}>\frac{4}{3\pi}$

また, $1.7<\sqrt{3}<1.8$ から $\sqrt{3}\pi<1.8\times3.2=5.76<6$ となり, $\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6}<\frac{6}{3\pi}$

よって, $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$ から, $\frac{1}{2}<\sin\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$ すなわち $\frac{1}{2}<u<\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり,

$$\frac{f(\alpha)}{S}<g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

［解 説］

微分と増減の問題です。(3)のポイントはαの評価式をつくることですが，この場面では，(2)で描いたグラフが役立ちます。

$\boxed{6}$

問題のページへ

$x_1=0$，$x_{n+1}=x_n+n+2\cos\left(\dfrac{2\pi x_n}{3}\right)$で定義される数列$\{x_n\}$に対して，

$$x_2=x_1+1+2\cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right)=0+1+2\cos 0=3$$

$$x_3=x_2+2+2\cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right)=3+2+2\cos 2\pi=7$$

すると，以下 mod 3 で記述すると，次式①のように予測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

$$x_{3m+1}\equiv 0,\ x_{3m+2}\equiv 0,\ x_{3m+3}\equiv 1\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots①$$

(i)　$m=0$ のとき　上記の計算より成立している。

(ii)　$m=l$ のとき　まず，一般的に k を整数として，

$x_n\equiv 0$ のとき $x_n=3k$ と表せ，$\cos\left(\dfrac{2\pi x_n}{3}\right)=\cos(2k\pi)=\cos 0=1$

$x_n\equiv 1$ のとき $x_n=3k+1$ と表せ，$\cos\left(\dfrac{2\pi x_n}{3}\right)=\cos\left(2k\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

そこで，$m=l$ のとき，①の成立を仮定すると，

$$x_{3l+4}=x_{3l+3}+(3l+3)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3l+3}}{3}\right)=x_{3l+3}+3(l+1)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\equiv 1+0-1\equiv 0$$

$$x_{3l+5}=x_{3l+4}+(3l+4)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3l+4}}{3}\right)=x_{3l+4}+3(l+1)+1+2\cdot 1$$

$$\equiv 0+1+2\equiv 3\equiv 0$$

$$x_{3l+6}=x_{3l+5}+(3l+5)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3l+5}}{3}\right)=x_{3l+5}+3(l+1)+2+2\cdot 1$$

$$\equiv 0+2+2\equiv 4\equiv 1$$

これより，$m=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，0 以上の整数 m で①は成立している。

以上より，$\cos\left(\dfrac{2\pi x_{3m+1}}{3}\right)=1$，$\cos\left(\dfrac{2\pi x_{3m+2}}{3}\right)=1$，$\cos\left(\dfrac{2\pi x_{3m+3}}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

さて，②を利用すると，

$$x_{3m+4}=x_{3m+3}+(3m+3)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+3}}{3}\right)=x_{3m+3}+3m+2$$

$$=x_{3m+2}+(3m+2)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+2}}{3}\right)+3m+2=x_{3m+2}+6m+6$$

$$=x_{3m+1}+(3m+1)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+1}}{3}\right)+6m+6=x_{3m+1}+9m+9$$

これより，$m\geqq 1$ において，

$$x_{3m+1}=x_1+\sum_{j=0}^{m-1}(9j+9)=0+\frac{9+9m}{2}\cdot m=\frac{9}{2}(m^2+m)\quad(m=0\text{ でも成立})$$

$$x_{3m+2} = x_{3m+1} + (3m+1) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+1}}{3}\right) = \frac{9}{2}(m^2+m) + (3m+1) + 2$$
$$= \frac{1}{2}(9m^2+15m+6)$$
$$x_{3m+3} = x_{3m+2} + (3m+2) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+2}}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(9m^2+15m+6) + (3m+2) + 2 = \frac{1}{2}(9m^2+21m+14)$$

そこで，$y_{3m+1} = 3m$，$y_{3m+2} = 3m+2$，$y_{3m+3} = 3m+4$ から，

(a)　$n = 3m+1$ のとき

$$x_{3m+1} - y_{3m+1} = \frac{9}{2}(m^2+m) - 3m = \frac{1}{2}(9m^2+3m) = \frac{1}{2}(3m+1)\cdot 3m$$

よって，$x_n - y_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ となる。

(b)　$n = 3m+2$ のとき

$$x_{3m+2} - y_{3m+2} = \frac{1}{2}(9m^2+15m+6) - (3m+2) = \frac{1}{2}(9m^2+9m+2)$$
$$= \frac{1}{2}(3m+2)(3m+1)$$

よって，$x_n - y_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ となる。

(c)　$n = 3m+3$ のとき

$$x_{3m+3} - y_{3m+3} = \frac{1}{2}(9m^2+21m+14) - (3m+4) = \frac{1}{2}(9m^2+15m+6)$$
$$= \frac{1}{2}(3m+3)(3m+2)$$

よって，$x_n - y_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ となる。

(a)～(c)より，数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項は，$x_n - y_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ である。

［解　説］

難しめの漸化式の問題です。数列 $\{x_n\}$ の漸化式の $\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)$ の部分の処理がポイントとなりますが，ここは実験をすることで周期性を見つけています。その後，$\{x_{3m+1}\}$ についての漸化式を作り，それを解いたわけですが，数列 $\{y_n\}$ については付録のような扱いになっています。