1　　解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1)　10 進法で表された数 6.75 を 2 進法で表せ。また，この数と 2 進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進法および 4 進法で表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}$ において $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする。$\triangle\mathrm{OAB}$ の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり，それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。このとき操作(∗)を $k=1,\ \cdots,\ n-1$ に対して，k が小さい方から順に 1 回ずつ行う。

(∗) 番号 k の箱から玉を 1 個取り出し，番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる。

一連の操作がすべて終了した後，番号 n の箱から玉を 1 個取り出し，番号 1 の箱に入れる。このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

空間の 8 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 3)$，E$(1,\ 0,\ 3)$，F$(1,\ 2,\ 3)$，G$(0,\ 2,\ 3)$ を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。点 O, 点 F, 辺 AE 上の点 P, および辺 CG 上の点 Q の 4 点が同一平面上にあるとする。このとき, 四角形 OPFQ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ。また, そのときの S の値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

p が素数ならば p^4+14 は素数でないことを示せ。

1　問題のページへ

(1)　$6=1\cdot2^2+1\cdot2^1+0=110_{(2)}$，$0.75=1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}=0.11_{(2)}$ より，

$$6.75=110.11_{(2)}$$

右の筆算より，

$$110.11_{(2)}\times101.0101_{(2)}=100011.110111_{(2)}$$

$$\begin{array}{r} 101.0101 \\ \times\quad 110.11 \\ \hline 1010101 \\ 1010101 \\ 1010101 \\ 1010101 \\ \hline 100011.110111 \end{array}$$

また，$100011_{(2)}=1\cdot2^5+1\cdot2^1+1$ から，

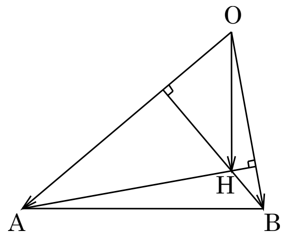
$$1\cdot2^5+1\cdot2^1+1=2\cdot2^4+3=2\cdot4^2+3=203_{(4)}$$

$0.110111_{(2)}=1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-4}+1\cdot2^{-5}+1\cdot2^{-6}$ から，

$$\begin{aligned}1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-4}+1\cdot2^{-5}+1\cdot2^{-6}&=3\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-4}+3\cdot2^{-6}\\&=3\cdot4^{-1}+1\cdot4^{-2}+3\cdot4^{-3}=0.313_{(4)}\end{aligned}$$

したがって，$100011.110111_{(2)}=203.313_{(4)}$ である。

(2)　$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ である△OAB の垂心 H に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\cdot2\cdot\cos60^\circ=3$ に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3(s-1)+4t=0,\ 3s+4t=3\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=9s+3(t-1)=0,\ 3s+t=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t=\dfrac{2}{3}$，$s=\dfrac{1}{9}$ となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

［解 説］

(1)は記数法についての計算問題，(2)は平面ベクトルの図形への応用題で，ともに基本事項の確認レベルです。なお，(2)は直角三角形に着目する方法もあります。

2

問題のページへ

$I=\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx$ とおくと，$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$ より，

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}-\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx\\
&=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}\\
&=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}+1\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\
&=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{12}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{19}{24}
\end{aligned}$$

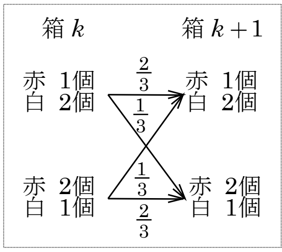
［解　説］

定積分の計算問題です。取り立てて工夫もせず，普通に計算しました。

3

問題のページへ

操作(＊)を行い，$n \geqq 3$のとき，箱$k(2 \leqq k \leqq n-1)$に3個の玉が入っているとし，赤玉1個，白玉2個入っている確率をp_k，赤玉2個，白玉1個入っている確率をq_kとおくと，



$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}q_k,\ q_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{2}{3}q_k$$

すると，$p_{k+1} + q_{k+1} = p_k + q_k$より，

$$p_k + q_k = p_2 + q_2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$p_{k+1} - q_{k+1} = \frac{1}{3}(p_k - q_k)$より，$p_k - q_k = (p_2 - q_2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdots\cdots\cdots ②$

さて，箱1から取り出して箱2に入れた玉の色で場合分けをすると，

(i)　箱1から赤玉を取り出して箱2に入れたとき

まず，箱1で赤玉を選ぶ確率が$\frac{1}{2}$で，このとき$p_2 = 0$，$q_2 = \frac{1}{2}$となり，①②より，

$$p_n + q_n = \frac{1}{2},\ p_n - q_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

これより，$p_n = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$，$q_n = \frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$となる。

そして，箱nから赤玉を取り出し箱1に入れると，箱1は赤玉と白玉1個ずつ入っている状態になり，その確率は，

$$\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n = \frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} + \frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

(ii)　箱1から白玉を取り出して箱2に入れたとき

まず，箱1で白玉を選ぶ確率が$\frac{1}{2}$で，このとき$p_2 = \frac{1}{2}$，$q_2 = 0$となり，①②より，

$$p_n + q_n = \frac{1}{2},\ p_n - q_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

これより，$p_n = \frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$，$q_n = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$となる。

そして，箱nから白玉を取り出し箱1に入れると，箱1は赤玉と白玉1個ずつ入っている状態になり，その確率は，

$$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} + \frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

(i)(ii)より，箱1に赤玉と白玉1個ずつ入っている確率は，

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdots\cdots\cdots ③$$

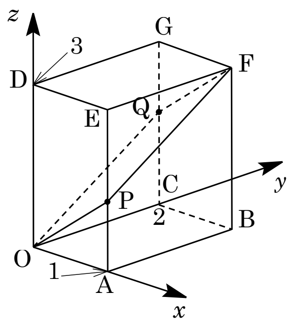
なお，③は$n = 2$のときも成立している。

［解 説］

確率と漸化式の問題です。解答例では箱の中の状態に着目して漸化式を立てました。

$\boxed{4}$

問題のページへ



右図の直方体 OABC-DEFG に対し，辺 AE 上に点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ p)$，辺 CG 上に点 $\mathrm{Q}(0,\ 2,\ q)$ をとる。ただし，$0 \leqq p \leqq 3$，$0 \leqq q \leqq 3$ とする。

このとき，4 点 O, P, F, Q が同一平面上にあることより，s, t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表せ，

$$(1,\ 2,\ 3) = s(1,\ 0,\ p) + t(0,\ 2,\ q)$$

すると，$1 = s$，$2 = 2t$，$3 = sp + tq$ から，

$$s = t = 1,\ p + q = 3 \cdots\cdots\cdots (*)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，四角形 OPFQ は平行四辺形となり，その面積 S は，

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2} = \sqrt{(1+p^2)(4+q^2)-(pq)^2}$$

$$= \sqrt{4p^2 + q^2 + 4}$$

ここで，$(*)$から，$q = 3 - p\ (0 \leqq p \leqq 3)$ なので，

$$S = \sqrt{4p^2 + (3-p)^2 + 4} = \sqrt{5p^2 - 6p + 13} = \sqrt{5\left(p - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}}$$

すると，$p = \frac{3}{5}\left(q = \frac{12}{5}\right)$ のとき，S は最小値 $\sqrt{\frac{56}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{70}$ をとり，このとき，

$$\mathrm{P}\left(1,\ 0,\ \frac{3}{5}\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ 2,\ \frac{12}{5}\right)$$

［解 説］

空間ベクトルの応用問題です。座標を設定して処理を行いましたが，ややこしい計算は現れませんでした。

$\boxed{5}$

問題のページへ

まず，素数 p について，$p=2$ のとき，$p \geqq 3$ のときで場合分けをする。

(i)　$p=2$ のとき

このとき，$p^4+14=30=2\cdot3\cdot5$ となり，p^4+14 は素数でない。

(ii)　$p \geqq 3$ のとき

$p=3$ では，$p^4+14=95=5\cdot19$ となり，p^4+14 は素数でない。

$p \neq 3$ では，以下 mod 3 で記すと，$p \equiv 1$ または $p \equiv 2$ で，$p<p^4+14$ に注意すると，

・ $p \equiv 1$ のとき　$p^4+14 \equiv 1^4+14 \equiv 15 \equiv 0$ より，p^4+14 は素数でない。

・ $p \equiv 2$ のとき　$p^4+14 \equiv 2^4+14 \equiv 30 \equiv 0$ より，p^4+14 は素数でない。

(i)(ii)より，p が素数ならば p^4+14 は素数でない。

［解　説］

京大らしい整数問題です。ただ，2018 年に同様な考え方をする類題があり，その経験がものを言います。