1

解答解説のページへ

a, b は実数で，$a>0$ とする。z に関する方程式 $z^3+3az^2+bz+1=0$ ……(＊)は 3 つの相異なる解をもち，それらは複素数平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする。このとき，a, b と(＊)の 3 つの解を求めよ。

2

解答解説のページへ

p を正の整数とする。α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする。

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

k を正の実数とする。座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき，k の値を求めよ。ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。

4

解答解説のページへ

正の整数 a に対して，$a=3^b c$ （$b,\ c$ は整数で c は 3 で割り切れない）の形に書いたとき，$B(a)=b$ と定める。例えば，$B(3^2\cdot 5)=2$ である。

$m,\ n$ は整数で，次の条件を満たすとする。

(i)　$1 \leqq m \leqq 30$　　(ii)　$1 \leqq n \leqq 30$　　(iii)　n は 3 で割り切れない

このような $(m,\ n)$ について，$f(m,\ n)=m^3+n^2+n+3$ とするとき，$A(m,\ n)=B(f(m,\ n))$ の最大値を求めよ。また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく。このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という。どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。右図はこのような入れ方の 1 例である。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

x, y, z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線 $z=\sqrt{\log(1+x)}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする。この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする。このとき，V の体積を求めよ。

1

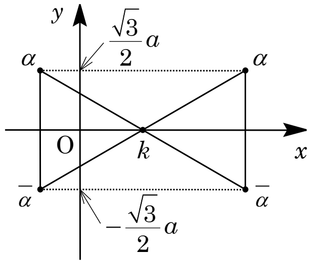
問題のページへ

実数係数の方程式 $z^3+3az^2+bz+1=0\ (a>0)$ ……(∗)の 3 つの相異なる解が，複素数平面上で正三角形の頂点になっていることより，(∗)は実数解を 1 つ，共役な虚数解を 2 つもつ。

そこで，k を実数，α を虚数として，(∗)の 3 つの解を $z=k,\ \alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，

$$k+\alpha+\overline{\alpha}=-3a\text{ ……①},\ \ k\alpha+k\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}=b\text{ ……②},\ \ k\alpha\overline{\alpha}=-1\text{ ……③}$$

そして，正三角形の配置には右図の 2 つのタイプがあり，1 辺の長さが $\sqrt{3}a$ から，高さは $\sqrt{3}a\cos 30^\circ=\dfrac{3}{2}a$ となり，



(i)　$\alpha=k+\dfrac{3}{2}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai$，$\overline{\alpha}=k+\dfrac{3}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai$ のとき

①より，$k+2k+3a=-3a$ となり，$k=-2a$ ………④

そして，2 つの虚数解は，

$$\alpha=-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}ai,\ \ \overline{\alpha}=-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}ai$$

②④より，$-2a\cdot(-a)+a^2=b$ となり，$b=3a^2$ ………⑤

③④より，$-2a\cdot a^2=-1$ から $2a^3=1$ となり，$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ………⑥

これは，$a>0$ を満たし，さらに⑤から $b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ となる。

このとき，(∗)の 3 つの解 $z=-2a,\ -\dfrac{1}{2}a\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai$ は，⑥から，

$$-2a=-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{4},\ \ -\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}}{2}ai=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(-1\pm\sqrt{3}i)$$

(ii)　$\alpha=k-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai$，$\overline{\alpha}=k-\dfrac{3}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai$ のとき

①より，$k+2k-3a=-3a$ となり，$k=0$ であるが，この値は③を満たさないので不適である。

(i)(ii)より，$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ であり，3 つの解は $-\sqrt[3]{4}$，$\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}(-1\pm\sqrt{3}i)$ となる。

［解 説］

複素数平面と図形についての基本的な問題です。正三角形の 2 つの配置に気づくことがポイントです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　正の整数 p に対して，方程式 $x^2-2px-1=0$ の解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=2p,\ \alpha\beta=-1$$

以下，すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数であることを証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$\alpha^1+\beta^1=2p$，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2$ となり，ともに偶数である。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$\alpha^k+\beta^k$，$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ はともに偶数であると仮定すると，

$$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$$
$$=2p(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})+(\alpha^k+\beta^k)$$

これより，$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$ は偶数となり，$n=k+2$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数である。

(2)　まず，与えられた方程式の解は $x=p\pm\sqrt{p^2+1}$ より，ともに実数である。

そこで，$\alpha\beta=-1$ より $\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$ となり，$|\beta|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ である。

さらに，$|\alpha|>1$ なので $0<|\beta|<1$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$ である。

さて，(1)より l_n を整数として，$\alpha^n+\beta^n=2l_n$ と表すことができるので，

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n}\sin\big((2l_n-\beta^n)\pi\big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n}\sin(-\beta^n\pi)$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n}\sin(\beta^n\pi)=-\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\beta^n\pi)=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=-\pi$ である。

［解　説］

極限についての頻出題です。(2)は，条件の $|\alpha|>1$ から，$|\beta|<1$ を導き $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$ を利用するという道筋が見えてきます。なお，(1)は有名題です。

3

問題のページへ

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと，4 点 A，B，C，D が原点 O を中心とする半径 1 の球面上にあるので，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，与えられた条件から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}\cdots\cdots②,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{\sqrt{6}}{4}\cdots\cdots③,\ \vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=k\cdots\cdots④$$

ここで，①②より $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ となり，①③より $-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{\sqrt{6}}{4}<-\frac{1}{2}$ に注意すると $120^\circ<\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}<135^\circ$ である。

これより，4 点 O, A, B, C は同一平面上にないので，$\vec{d}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて，

$$\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\quad(p,\ q,\ r\text{ は定数})\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

①⑤より，$|p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}|=1$ なので，①②③を利用すると，

$$p^2+q^2+r^2+pq-\frac{\sqrt{6}}{2}qr-\frac{\sqrt{6}}{2}pr=1\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

②⑤より，$\vec{c}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})=\frac{1}{2}$ なので，①③を利用すると，

$$-\frac{\sqrt{6}}{4}p-\frac{\sqrt{6}}{4}q+r=\frac{1}{2},\ -\sqrt{6}p-\sqrt{6}q+4r=2\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑤より，$\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})=\vec{b}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})$ なので，①②③を利用すると，

$$p+\frac{1}{2}q-\frac{\sqrt{6}}{4}r=\frac{1}{2}p+q-\frac{\sqrt{6}}{4}r,\ p=q\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より $-2\sqrt{6}p+4r=2$ となり，$r=\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑨$

⑥⑧より $3p^2+r^2-\sqrt{6}pr=1$ となり，⑨を代入すると，

$$3p^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{6}p\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)=1$$

まとめると，$\frac{3}{2}p^2+\frac{1}{4}=1$ となり，$p^2=\frac{1}{2}$ から $p=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots⑩$

さて，④⑧⑨より，$k=p+\frac{1}{2}q-\frac{\sqrt{6}}{4}r=p+\frac{1}{2}p-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}p-\frac{\sqrt{6}}{8}$

ここで，$k>0$ なので⑩より $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$k=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの誘導のない問題です。方針について，成分表示か 1 次結合か迷いましたが，ここでは後者で処理をしました。

4　　問題のページへ

m は 30 以下の整数，n は 3 で割り切れない 30 以下の自然数のとき，

$$f(m,\ n)=m^3+n^2+n+3=m^3+n(n+1)+3$$

そして，$f(m,\ n)=3^bc$（b, c は整数で c は 3 で割り切れない）のとき，

$$A(m,\ n)=B(f(m,\ n))=b$$

まず，n, m を 3 で割った余りで場合分けをする。以下，mod3 で記す。

(i)　$n\equiv 1$ のとき

(a)　$m\equiv 0$ のとき　$f(m,\ n)\equiv 0+1\times 2+0\equiv 2$ より $A(m,\ n)=0$ である。

(b)　$m\equiv 1$ のとき　$f(m,\ n)\equiv 1+1\times 2+0\equiv 3\equiv 0$ より $A(m,\ n)\geqq 1$ である。

(c)　$m\equiv 2$ のとき　$f(m,\ n)\equiv 8+1\times 2+0\equiv 10\equiv 1$ より $A(m,\ n)=0$ である。

(ii)　$n\equiv 2$ のとき

(a)　$m\equiv 0$ のとき　$f(m,\ n)\equiv 0+2\times 3+0\equiv 6\equiv 0$ より $A(m,\ n)\geqq 1$ である。

(b)　$m\equiv 1$ のとき　$f(m,\ n)\equiv 1+2\times 3+0\equiv 7\equiv 1$ より $A(m,\ n)=0$ である。

(c)　$m\equiv 2$ のとき　$f(m,\ n)\equiv 8+2\times 3+0\equiv 14\equiv 2$ より $A(m,\ n)=0$ である。

(i)(ii)より，$A(m,\ n)\geqq 1$ となるのは，$(m,\ n)\equiv(1,\ 1),\ (0,\ 2)$ のときである。

以下，$A(m,\ n)$ の最大値を求めるために，$(m,\ n)\equiv(1,\ 1),\ (0,\ 2)$ のときを調べる。

(I)　$(m,\ n)\equiv(1,\ 1)$ のとき

$m=3k+1$，$n=3l+1$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 9\ ;\ l=0,\ 1,\ \cdots,\ 9)$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(m,\ n)&=(3k+1)^3+(3l+1)(3l+2)+3\\&=27k^3+27k^2+9k+1+9l^2+9l+2+3\\&=3(9k^3+9k^2+3k+3l^2+3l+2)\end{aligned}$$

ここで，$g(k,\ l)=9k^3+9k^2+3k+3l^2+3l+2$ とおくと，どんな $k,\ l$ に対しても $g(k,\ l)\equiv 2$ となり $g(k,\ l)$ は 3 で割り切れない。

これより，$f(m,\ n)=3^1c$ となり，$A(m,\ n)=1$ である。

(II) $(m,\ n)\equiv(0,\ 2)$ のとき

$m=3k$，$n=3l-1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10\ ;\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(m,\ n)&=(3k)^3+(3l-1)\cdot 3l+3=27k^3+9l^2-3l+3\\&=3(9k^3+3l^2-l+1)\end{aligned}$$

ここで，$h(k,\ l)=9k^3+3l^2-l+1$ とおくと，$h(k,\ l)\equiv 0$ となるのは $-l+1$ が 3 で割り切れる，すなわち $l=1,\ 4,\ 7,\ 10$ のときである。

- $l=1$ のとき　$h(k,\ l)=9k^3+3+1-1=9k^3+3=3(3k^3+1)$
- $l=4$ のとき　$h(k,\ l)=9k^3+48-4+1=9k^3+45=3^2(k^3+5)$
- $l=7$ のとき　$h(k,\ l)=9k^3+147-7+1=9k^3+141=3(3k^3+47)$
- $l=10$ のとき　$h(k,\ l)=9k^3+300-10+1=9k^3+291=3(3k^3+97)$

$l=1,\ 7,\ 10$ のとき，どんな k に対しても，$3k^3+1\equiv 1$，$3k^3+47\equiv 47\equiv 2$，$3k^3+97\equiv 97\equiv 1$ となり，$h(k,\ l)$ は 3 で割り切れ，3^2 で割り切れない。

よって，$l=1,\ 7,\ 10$ のときは $f(m,\ n)=3^2c$ となり，

$$A(m,\ n)=2$$

$l=4$ のとき，$f(m,\ n)=3^3(k^3+5)$ となり，$k\equiv 0$ では $k^3+5\equiv 0+5\equiv 2$，$k\equiv 1$ では $k^3+5\equiv 1+5\equiv 0$，$k\equiv 2$ では $k^3+5\equiv 8+5\equiv 1$ であるので，

・$k\equiv 0,\ 2$ のとき　k^3+5 は 3 で割り切れない。これより $f(m,\ n)=3^3c$ となり，

$$A(m,\ n)=3$$

・$k\equiv 1$ のとき　k^3+5 は 3 で割り切れる。
また，右表より 3^2 で割り切れない。
これより $f(m,\ n)=3^4c$ となり，

$$A(m,\ n)=4$$

k	1	4	7	10
k^3+5	6	69	348	1005

以上より，$A(m,\ n)$ の最大値は 4 である。

このとき，$l=4$ かつ $k=1,\ 4,\ 7,\ 10$ であるので，最大値をとる $(m,\ n)$ は，

$$(m,\ n)=(3,\ 11),\ (12,\ 11),\ (21,\ 11),\ (30,\ 11)$$

［解 説］

息の長い議論の必要な整数問題です。ポイントといえば，3 で割った余りに着目し，ふるいにかけて絞り込んでいくというぐらいです。ただ，時間的にはかなり厳しいものがありますが。

5

問題のページへ

まず, 1 行目 4 個のマス目の入れ方は, 1, 2, 3, 4 の数字を 1 列に並べることより, $4!=24$ 通りの場合がある。

ここで, 右図のように, 1 行目のマス目に左から(1, 2, 3, 4)の順序に数字が入れてある場合を考える。

1	2	3	4
×	×	×	×
×	×	×	×
×	×	×	×

ここで, どの行も 1, 2, 3, 4 の数字が入れてあり, しかもどの列にも 1, 2, 3, 4 の数字が入れてあることを考え, 2 行 1 列目に入れてある数字で場合分けをする。

(i) 2 行 1 列目の数字が 2 の場合

このとき, 2 行目は次のいずれかとなる。

(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3)

(a)　2 行目の数字の入れ方が(2, 1, 4, 3)のときは, 3 行目は,

(3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 3, 1, 2),

(4, 3, 2, 1)

1	2	3	4
2	1	4	3
×	×	×	×
×	×	×	×

また, 4 行目は各々1 通りずつである。

(b)　2 行目の数字の入れ方が(2, 3, 4, 1)のときは, 3 行目は,

(3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3)

1	2	3	4
2	3	4	1
×	×	×	×
×	×	×	×

また, 4 行目は各々1 通りずつである。

(c)　2 行目の数字の入れ方が(2, 4, 1, 3)のときは, 3 行目は,

(3, 1, 4, 2), (4, 3, 2, 1)

1	2	3	4
2	4	1	3
×	×	×	×
×	×	×	×

また, 4 行目は各々1 通りずつである。

(a)(b)(c)を合わせると, $4+2+2=8$（通り）

(ii) 2 行 1 列目の数字が 3 の場合　(i)と同じく 8 通りである。

(iii) 2 行 1 列目の数字が 4 の場合　(i)と同じく 8 通りである。

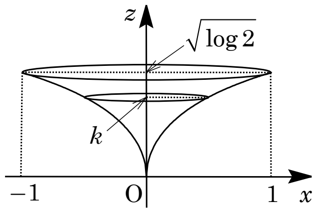
(i)(ii)(iii)より, 求める入れ方は, $24\times(8+8+8)=576$ 通りである。

［解 説］

いろいろな考え方ができる場合の数の問題です。ここでは, 対象が大きなマス目でないので, 具体的に考えています。なお, 解答例の(i)の(b)と(c)については, まとめて記述しても構いません。

6

問題のページへ



xz 平面内の曲線 $z=\sqrt{\log(1+x)}$ $(0\leqq x\leqq 1)$……①を z 軸のまわりに 1 回転させ，この曲線が通過した部分よりなる図形 S を，平面 $z=k$ $(0\leqq k\leqq\sqrt{\log 2})$ で切断する。

①より，$k=\sqrt{\log(1+x)}$ とすると $x=e^{k^2}-1$ となるので，切り口は中心が $(0,\ 0,\ k)$ で半径が $e^{k^2}-1$ の円となり，

$$x^2+y^2=\left(e^{k^2}-1\right)^2 \quad \text{かつ} \quad z=k \quad (0\leqq k\leqq\sqrt{\log 2})$$

これより，S の方程式は，

$$x^2+y^2=\left(e^{z^2}-1\right)^2 \quad \text{かつ} \quad 0\leqq z\leqq\sqrt{\log 2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，S を平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で切断すると，その切り口は，②より，

$$t^2+y^2=\left(e^{z^2}-1\right)^2\cdots\cdots③ \quad \text{かつ} \quad 0\leqq z\leqq\sqrt{\log 2}\cdots\cdots④$$

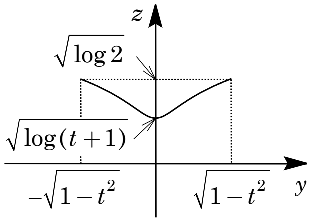
④より $e^{z^2}-1\geqq 0$ なので，③は $e^{z^2}-1=\sqrt{y^2+t^2}$ となり，$e^{z^2}=\sqrt{y^2+t^2}+1$ から，

$$z^2=\log\left(\sqrt{y^2+t^2}+1\right),\ \ z=\sqrt{\log\left(\sqrt{y^2+t^2}+1\right)}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より z は偶関数であり，しかも $y\geqq 0$ において単調に増加する。

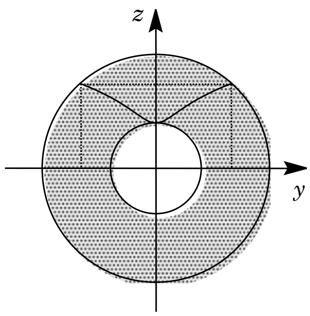
また，④から $z=\sqrt{\log 2}$ のとき，⑤から $\log 2=\log\left(\sqrt{y^2+t^2}+1\right)$ となり，

$$\sqrt{y^2+t^2}+1=2,\ \ y^2+t^2=1,\ \ y=\pm\sqrt{1-t^2}$$



よって，④のもとで⑤のグラフは右図の実線部となる。

ここで，S を x 軸のまわりに 1 回転させ，S が通過した部分よりなる立体 V を，平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で切断すると，その切り口は右図の実線部を点 $(t,\ 0,\ 0)$ のまわりに回転したドーナツ形（右下図の網点部）になる。



その外径を R，内径を r とおくと，

$$R=\sqrt{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+\left(\sqrt{\log 2}\right)^2}=\sqrt{1+\log 2-t^2}$$
$$r=\sqrt{\log(t+1)}$$

そして，このドーナツ形の面積を $U(t)$ とすると，

$$U(t)=\pi(R^2-r^2)$$
$$=\pi\{1+\log 2-t^2-\log(t+1)\}$$

以上より，立体 V の体積 W は，V が yz 平面について対称なことを利用すると，

$$W=2\int_0^1 U(t)\,dt=2\pi\int_0^1\{1+\log 2-t^2-\log(t+1)\}\,dt$$
$$=2\pi\left\{(1+\log 2)-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1-\left[(t+1)\log(t+1)\right]_0^1+\int_0^1 dt\right\}$$
$$=2\pi\left(1+\log 2-\frac{1}{3}-2\log 2+1\right)=\left(\frac{10}{3}-2\log 2\right)\pi$$

［解 説］

立体の回転体の体積を求めるという時々みかける問題です。解法の流れは明快ですが，ただ現れる方程式がかなり面倒で，ずいぶん時間を費やします。